GRUNDSTRUKTUREN

Skript zur Vorlesung 2022

Lorenz Halbeisen

ETH Zürich

Das Skript wurde im Frühling 2022 zur Vorlesung “Grundstrukturen” geschrieben. Bei dieser Gelegenheit möchte ich den Studierenden, insbesondere Herrn Roy Seitz, für die zahlreichen Kommentare und Verbesserungsvorschläge danken.

INHALTSVERZEICHNIS

*gehört nicht zum Vorlesungsstoff

0. TERME, FORMELN UND FORMALE BEWEISE

In diesem Kapitel wird die Syntax (auch Sprache genannt) der Logik erster Stufe definiert. Insbesondere werden wir definieren, was Terme und Formeln sind. Dafür brauchen wir zuerst ein sogenanntes *Alphabet*, d.h. ein Vorrat an Zeichen und Symbolen, aus dem wir Terme und Formeln bilden können.

DAS ALPHABET

Das Alphabet der Logik erster Stufe besteht aus folgenden Zeichen und Symbolen:

(a) **Variablen**: Zum Beispiel $x, y, v_0, v_1, \ldots$, von denen wir einen unendlichen Vorrat haben. Variablen stehen für Objekte, die wir untersuchen. Diese Objekte können zum Beispiel natürliche Zahlen sein (in der Zahlentheorie), oder auch Mengen (in der Mengenlehre), oder Vektoren (in der linearen Algebra), etc.

(b) **Logische Operatoren**: $\neg$ (*nicht*), $\wedge$ (*und*), $\vee$ (*oder*), $\rightarrow$ (*impliziert*).

(c) **Logische Quantoren**: $\exists$ (*Existenzquantor*) und $\forall$ (*Allquantor*), nach einem logischen Quantor steht *immer* eine Variable.

(d) **Gleichheitsrelation** $=$: Das Zeichen "$=$" steht für eine spezielle binäre Relation, nämlich für die Gleichheitsrelation.

(e) **Konstantensymbole**: Diese Symbole werden verwendet um spezielle Konstanten (in einer Theorie) zu bezeichnen. Konstantensymbole sind zum Beispiel 0 (in der Zahlentheorie), $\emptyset$ (in der Mengenlehre), etc.

(f) **Funktionssymbole**: Diese Symbole werden verwendet um spezielle Funktionen (in einer Theorie) zu bezeichnen. Funktionssymbole sind zum Beispiel $+$ (in der Zahlentheorie), $\sin$ (in der Analysis), etc. Zu jedem Funktionssymbol gehört eine *Stelligkeit*. Zum Beispiel ist $+$ ein 2-stelliges Funktionssymbol und $\sin$ ist ein 1-stelliges Funktionssymbol.

(g) **Relationssymbole**: Diese Symbole werden verwendet um spezielle Relationen (in einer Theorie) zu bezeichnen. Relationssymbole sind zum Beispiel $<$ (in der Zahlentheorie), $\in$ (in der Mengenlehre), etc. Zu jedem Relationssymbol gehört eine *Stelligkeit*. Zum Beispiel sind $<$ und $\in$ beides 2-stellige Relationssymbole.

Die Symbole (a)–(d) sind die **logischen Symbole**, diese Symbole haben wir immer. Die Symbole (e)–(g) sind die **nicht-logischen Symbole**, welche und wieviele dieser Symbole wir haben, hängt von der Theorie ab, die wir untersuchen. Die nicht-logischen Symbole einer Theorie bilden die **Signatur** (oder Sprache) der Theorie, diese wird mit $\mathscr{L}$ oder $\mathscr{L}_{\mathsf{T}}$ (für eine Theorie T) bezeichnet. Zum Beispiel ist $\mathscr{L}_{\mathsf{ZFC}} = \{\in\}$ die Signatur der Mengenlehre ZFC.

TERME

Mit den Zeichen des Alphabets können wir nun spezielle Zeichenketten oder Wörter bilden. In der Sprache der Logik erster Stufe heissen diese Zeichenketten *Terme*. Im Folgenden sei $\mathscr{L}$ eine beliebige Signatur.

Eine Zeichenkette ist ein **$\mathscr{L}$-Term**, oder einfach ein **Term**, falls die Zeichenkette durch endlich viele Anwendungen der folgenden Regeln entstanden ist.

(T0) Jede Variable ist ein $\mathscr{L}$-Term.
(T1) Jedes Konstantensymbol in $\mathscr{L}$ ist ein $\mathscr{L}$-Term.

(T2) Sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ bereits konstruierte $\mathscr{L}$-Terme und ist F ein n-stelliges Funktionssymbol in $\mathscr{L}$, dann ist $F\tau_1 \cdots \tau_n$ ein $\mathscr{L}$-Term.

Um die Regel (T2) zu definieren, haben wir Variablen für Terme gebraucht. Da nun Variablen aus unserem Alphabet selber Terme sind, haben wir neue Variablen τ_i, die nicht zu unserem Alphabet gehören, eingeführt.

FORMELN

Mit Termen (bzw. mit den Wörtern) und weitern Zeichen aus unserem Alphabet, können wir nun wieder spezielle Zeichenketten oder Sätze bilden. In der Sprache der Logik erster Stufe heissen diese Zeichenketten *Formeln*. Im Folgenden sei $\mathscr{L}$ eine beliebige Signatur.

Eine Zeichenkette ist eine **$\mathscr{L}$-Formel**, oder einfach eine **Formel**, falls die Zeichenkette durch endlich viele Anwendungen der folgenden Regeln entstanden ist.

(F0) Sind τ_1 und τ_2 $\mathscr{L}$-Terme, dann ist $= \tau_1\tau_2$ eine $\mathscr{L}$-Formel.
(F1) Sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ bereits konstruierte $\mathscr{L}$-Terme und ist R ein n-stelliges Relationssymbol in $\mathscr{L}$, dann ist $R\tau_1 \cdots \tau_n$ eine $\mathscr{L}$-Formel.
(F2) Ist φ eine bereits konstruierte $\mathscr{L}$-Formel, dann ist $\neg\varphi$ eine $\mathscr{L}$-Formel.
(F3) Sind φ und ψ bereits konstruierte $\mathscr{L}$-Formeln, dann sind $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, und $\rightarrow \varphi\psi$ ebenfalls $\mathscr{L}$-Formeln.
(F4) Ist φ eine bereits konstruierte $\mathscr{L}$-Formel und ν eine beliebige Variable, dann sind $\exists\nu\varphi$ und $\forall\nu\varphi$ ebenfalls $\mathscr{L}$-Formeln.

Um Formeln einfach lesbar zu machen verwenden wir üblicherweise die Infix-Notation mit Klammern anstelle der polnischen Notation. Zum Beispiel schreiben wir $\varphi \wedge \psi$ anstelle von $\wedge\varphi\psi$, $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$ anstelle von $\rightarrow\rightarrow \varphi\psi\varphi$, etc.

Weiter schreiben wir für binäre Relationssymbole R und binäre Funktionssymbole F meist xRy und xFy anstelle von Rxy bzw. Fxy. Zum Beispiel schreiben wir $x = y$ anstelle von $= xy$, und $x + y$ anstelle von $+xy$.

Ist eine Formel φ von der Form $\exists\nu\psi$ oder $\forall\nu\psi$ (für eine Variable ν und eine Formel ψ) und die Variable ν kommt in ψ vor, dann sagen wir, dass die Variable ν im Bereich eines logischen Quantors ist; die Variable wird dann durch den Quantor **gebunden**. Ist eine Variable ν in einer Formel ψ an einer gewissen Stelle nicht im Bereich eines Quantors (d.h. die Variable ist nicht gebunden), so kommt die Variable ν an der entsprechenden Stelle **frei** vor in ψ. Die Menge der Variablen, welche in einer Formel ψ frei vorkommen, wird mit $\mathrm{frei}(\psi)$ bezeichnet. Da eine Variable in einer Formel ψ an mehreren Stellen vorkommen kann, kann eine Variable sowohl frei wie auch gebunden in ψ vorkommen. Zum Beispiel kommt die Variable x in der Formel $\exists z(x = z) \wedge \forall x(x = y)$ sowohl frei wie auch gebunden vor. Durch Umbenennen der Variablen lässt sich aber erreichen, dass jede Variable in einer Formel entweder nur gebunden oder nur frei vorkommt.

Eine Formel φ ist ein **Satz**, falls φ keine freien Variablen enthält (d.h. $\mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset$). Zum Beispiel ist $\forall x\forall y(x = y)$ ein Satz, aber $\forall x(x = y)$ ist nur eine Formel.

Manchmal ist es nützlich die freien Variablen in einer Formel explizit aufzulisten; wir schreiben $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ um anzuzeigen, dass die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ frei in φ vorkommen.

Ist φ eine Formel, ν eine Variable und τ ein Term, dann ist $\varphi(\nu/\tau)$ diejenige Formel, die wir erhalten, wenn wir an jeder Stelle, an der die Variable ν in φ frei vorkommt, die Variable ν ersetzen durch den Term τ. Dieser Prozess, bei dem wir aus φ die Formel $\varphi(\nu/\tau)$ erhalten, heisst **Substitution**. Eine Substitution $\varphi(\nu/\tau)$ ist nur dann **zulässig**, wenn keine Variable im Term τ durch Quantoren von φ gebunden werden. Gilt zum Beispiel $x \notin \mathrm{frei}(\varphi)$, dann ist die

Substitution $\varphi(x/\tau)$ zulässig für jeden Term τ. In diesem Fall ist die Formel φ identisch mit $\varphi(x/\tau)$, was wir durch $\varphi \equiv \varphi(x/\tau)$ ausdrücken — das Gleichheitszeichen "=" macht zwischen Formeln keinen Sinn.

DIE LOGISCHEN AXIOME

Bei der Definition von Formeln haben wir zwar Zeichen wie zum Beispiel "=" oder "$\wedge$" gebraucht, wir haben aber nicht festgelegt, was diese Zeichen später, wenn wir Formeln interpretieren werden, bedeuten sollen. Zum Beispiel möchten wir, dass die Formel $x = x$ "wahr" ist. Da es aber auf der syntaktischen Ebene keinen Wahrheitsbegriff gibt, können wir $x = x$ nicht einfach als "wahr" definieren. Wir können aber gewisse Formeltypen (oder Formelschemata), wie zum Beispiel $x = x$, auszeichnen. Die folgenden **logischen Axiome**, eigentlich *Axiomenschemata*, sind solche ausgezeichneten Formeltypen, welche den Gebrauch der logischen Operatoren und Quantoren sowie der Gleichheitsrelation regeln.

Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur und seien φ, φ_1, φ_2, φ_3, und ψ beliebige $\mathscr{L}$-Formeln:

L_0: $\varphi \vee \neg\varphi$
L_1: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
L_2: $(\psi \to (\varphi_1 \to \varphi_2)) \to ((\psi \to \varphi_1) \to (\psi \to \varphi_2))$
L_3: $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
L_4: $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
L_5: $\varphi \to (\psi \to (\psi \wedge \varphi))$
L_6: $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
L_7: $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
L_8: $(\varphi_1 \to \varphi_3) \to ((\varphi_2 \to \varphi_3) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \varphi_3))$
L_9: $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

Sei τ ein $\mathscr{L}$-Term, ν eine Variable, und sei die Substitution $\varphi(\nu/\tau)$ zulässig:

L_{10}: $\forall\nu\varphi(\nu) \to \varphi(\tau)$
L_{11}: $\varphi(\tau) \to \exists\nu\varphi(\nu)$

Sei ψ eine Formel und sei ν eine Variable mit $\nu \notin \mathrm{frei}(\psi)$:

L_{12}: $\forall\nu(\psi \to \varphi(\nu)) \to (\psi \to \forall\nu\varphi(\nu))$,
L_{13}: $\forall\nu(\varphi(\nu) \to \psi) \to (\exists\nu\varphi(\nu) \to \psi)$.

Seien τ, $\tau_1, \ldots, \tau_n$, $\tau'_1, \ldots, \tau'_n$ $\mathscr{L}$-Terme, sei $R \in \mathscr{L}$ ein n-stelliges Relationssymbol und sei $F \in \mathscr{L}$ ein n-stelliges Funktionssymbol:

L_{14}: $\tau = \tau$
L_{15}: $(\tau_1 = \tau'_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n = \tau'_n) \to (R(\tau_1, \ldots, \tau_n) \to R(\tau'_1, \ldots, \tau'_n))$
L_{16}: $(\tau_1 = \tau'_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n = \tau'_n) \to (F(\tau_1, \ldots, \tau_n) = F(\tau'_1, \ldots, \tau'_n))$

Die logischen Axiome L_0–L_9 sind die Axiome der Aussagenlogik, welche den Gebrauch der logischen Operatoren regeln, die logischen Axiome L_{10}–L_{13} regeln den Gebrauch der logischen Quantoren, und die logischen Axiome L_{14}–L_{16} regeln den Gebrauch der Gleichheitsrelation.

LOGISCHE ÄQUIVALENZ

Die Formel $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist eine abgekürzte Schreibweise für $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, d.h. jede Formel, in welcher der binäre logische Operator $\leftrightarrow$ vorkommt, kann ersetzt werden durch eine Formel, in welcher $\leftrightarrow$ nicht mehr vorkommt. Wir sagen nun, dass zwei Formeln φ und ψ

logisch äquivalent sind, in Zeichen $\varphi \Leftrightarrow \psi$, falls gilt:

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{bzw.} \quad \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

Mit L_5 und (MP) gilt $\varphi \Leftrightarrow \psi$ genau dann wenn

$$\vdash \varphi \to \psi \quad \text{und} \quad \vdash \psi \to \varphi\,.$$

Der Beweis des folgenden Satzes benutzt "Metainduktion" über den Formelaufbau und ist relativ aufwendig.

SATZ ÜBER LOGISCHE ÄQUIVALENZ. *Sei φ eine Formel und sei α eine Teilformel von φ. Weiter sei ψ eine Formel, die aus φ dadurch entstanden ist, dass in φ ein- oder mehrmals α durch eine Formel β ersetzt wurde. Dann gilt:*

$$\textit{Ist} \;\; \alpha \Leftrightarrow \beta, \quad \textit{so ist auch} \;\; \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

NICHT-LOGISCHEN AXIOME

Wenn wir eine konkrete Theorie haben, wie zum Beispiel die Zahlentheorie, so kommen zu den logischen Axiomen sogenannte **nicht-logische Axiome** hinzu, welche den Gebrauch (bzw. die Bedeutung) der nicht-logischen Symbole dieser Theorie regeln. Die nicht-logischen Axiome einer Theorie sind ausgezeichnete Formeln (meistens Sätze) welche wir meist mit $\mathbf{\Phi}$ (bzw. T) bezeichnen.

FORMALE BEWEISE

Um aus gegebenen Formeln Schlüsse zu ziehen oder Aussagen über bestimmte Terme zu machen, brauchen wir sowohl Schlussregeln wie auch einen Algorithmus, der uns sagt, auf welche Formeln wir die Schlussregeln anwenden können.

Wir brauchen nur zwei **Schlussregeln**, nämlich

$$\text{Modus Ponens (MP):} \quad \frac{\varphi \to \psi,\, \varphi}{\psi} \qquad \text{und} \qquad \text{Verallgemeinerung } (\forall): \quad \frac{\varphi}{\forall \nu \varphi}\,.$$

Im ersten Fall sagen wir, dass die Formel ψ aus den Formeln $\varphi \to \psi$ und φ durch Modus Ponens, abgekürzt (MP), entstanden ist, und im zweiten Fall sagen wir, dass die Formel $\forall \nu \varphi$ (wobei ν für irgend eine Variable steht) aus der Formel φ durch Verallgemeinerung, abgekürzt ($\forall$) entstanden ist.

Mit den zwei Schlussregeln (MP) und ($\forall$) können wir nun formale Beweise definieren: Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur (d.h. eine möglicherweise leere Menge von nicht-logischen Symbolen) und sei $\mathbf{\Phi}$ eine (möglicherweise leere) Menge von $\mathscr{L}$-Formeln. Eine $\mathscr{L}$-Formel ψ ist **beweisbar** aus $\mathbf{\Phi}$ (oder beweisbar in $\mathbf{\Phi}$), bezeichnet mit $\mathbf{\Phi} \vdash \psi$, falls es eine endliche Sequenz $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ von $\mathscr{L}$-Formeln gibt, sodass $\varphi_n \equiv \psi$ (d.h. die Formeln φ_n und ψ sind identisch), und für alle i mit $i \leq n$ sind wir in mindestens einem der folgenden Fälle:

- φ_i ist eine Instanziierung eines logischen Axioms
- φ_i ist eine Formel aus $\mathbf{\Phi}$
- es gibt $j, k < i$ sodass $\varphi_j \equiv \varphi_k \to \varphi_i$
- es gibt ein $j < i$ und eine Variable ν, sodass $\varphi_i \equiv \forall \nu\, \varphi_j$

Die Sequenz $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ ist dann ein **formaler Beweis** von ψ aus $\mathbf{\Phi}$.

Im Fall, wenn $\mathbf{\Phi}$ die leere Menge ist, schreiben wir einfach $\vdash \psi$. Ist eine Formel ψ nicht aus $\mathbf{\Phi}$ beweisbar (d.h. es gibt keinen formalen Beweis von ψ aus $\mathbf{\Phi}$), so schreiben wir $\mathbf{\Phi} \nvdash \psi$.

Formale Beweise, auch für sehr einfache Formeln, können recht lang und knifflig sein. Als Beispiel für einen formalen Beweis zeigen wir:

$$\vdash \varphi \to \varphi$$

φ_0:	$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	Instanziierung von L_2
φ_1:	$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	Instanziierung von L_1
φ_2:	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	aus φ_0 und φ_1 mit (MP)
φ_3:	$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	Instanziierung von L_1
φ_4:	$\varphi \to \varphi$	aus φ_2 und φ_3 mit (MP)

Das folgende Theorem ist sehr nützlich um formale Beweise zu vereinfachen.

DEDUKTIONSTHEOREM (DT). *Ist $\mathbf{\Phi}$ eine Menge von Formeln mit $\mathbf{\Phi} + \psi \vdash \varphi$, wobei im formalen Beweis von φ aus $\mathbf{\Phi} + \psi$ die Verallgemeinerung nicht auf Variablen angewandt wurde, welche frei in ψ vorkommen, so gilt $\mathbf{\Phi} \vdash \psi \to \varphi$; und umgekehrt, gilt $\mathbf{\Phi} \vdash \psi \to \varphi$, dann gilt auch $\mathbf{\Phi} + \psi \vdash \varphi$.*

Beweis. Mit (MP) folgt aus $\mathbf{\Phi} \vdash \psi \to \varphi$ direkt $\mathbf{\Phi} + \psi \vdash \varphi$. Für die andere Richtung nehmen wir an, dass $\mathbf{\Phi} + \psi \vdash \varphi$ gilt. Sei nun die Sequenz $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ mit $\varphi_n \equiv \varphi$ ein formaler Beweis von φ aus $\mathbf{\Phi} + \psi$. Für jedes $i \leq n$ ersetzen wir nun φ_i durch eine Sequenz von Formeln, welche mit $\psi \to \varphi_i$ endet. Dazu sei $i \leq n$ und wir nehmen an, dass $\mathbf{\Phi} \vdash \psi \to \varphi_j$ gilt für alle $j < i$.

- Ist φ_i ein logisches Axiom oder $\varphi_i \in \mathbf{\Phi}$, dann haben wir:

$\varphi_{i,0}$:	φ_i	$\varphi_i \in \mathbf{\Phi}$ oder φ_i ist ein logisches Axiom
$\varphi_{i,1}$:	$\varphi_i \to (\psi \to \varphi_i)$	Instanziierung von L_1
$\varphi_{i,2}$:	$\psi \to \varphi_i$	aus $\varphi_{i,1}$ und $\varphi_{i,0}$ mit (MP)

- Der Fall $\varphi_i \equiv \psi$ folgt direkt aus $\vdash \varphi_i \to \varphi_i$, was im obigen Beispiel gezeigt wurde.

- Falls φ_i aus φ_j und $\varphi_k \equiv (\varphi_j \to \varphi_i)$ durch Modus Ponens erhalten wurde, wobei $j, k < i$, dann haben wir:

$\varphi_{i,0}$:	$\psi \to \varphi_j$	weil $j < i$
$\varphi_{i,1}$:	$\psi \to (\varphi_j \to \varphi_i)$	weil $k < i$

$\varphi_{i,2}$:	$\varphi_{i,1} \to ((\psi \to \varphi_j) \to (\psi \to \varphi_i))$	Instanziierung von L_2
$\varphi_{i,3}$:	$(\psi \to \varphi_j) \to (\psi \to \varphi_i)$	aus $\varphi_{i,2}$ und $\varphi_{i,1}$ mit (MP)
$\varphi_{i,4}$:	$\psi \to \varphi_i$	aus $\varphi_{i,3}$ und $\varphi_{i,0}$ mit (MP)

- Falls φ_i aus φ_j durch Verallgemeinerung erhalten wurde, wobei $j < i$, d.h. $\varphi_i \equiv \forall \nu \varphi_j$ für eine Variable ν, dann gilt, dass die Variable ν in ψ nicht frei vorkommt. Die Behauptung folgt dann aus:

Somit haben wir gezeigt, dass $\mathbf{\Phi} \vdash \psi \to \varphi$ gilt. ⊣

$\varphi_{i,0}$:	$\psi \to \varphi_j$	weil $j < i$
$\varphi_{i,1}$:	$\forall\nu(\psi \to \varphi_j)$	aus $\varphi_{i,0}$ durch ($\forall$)
$\varphi_{i,2}$:	$\forall\nu(\psi \to \varphi_j) \to (\psi \to \varphi_i)$	Instanziierung von L_{12}
$\varphi_{i,3}$:	$\psi \to \varphi_i$	aus $\varphi_{i,2}$ und $\varphi_{i,1}$ mit (MP)

Als Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREMS zeigen wir, dass die Gleichheitsrelation "$=$" eine Äquivalenzrelation ist: Eine binäre Relation R ist eine **Äquivalenzrelation** falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

reflexiv: $\forall x(xRx)$
symmetrisch: $\forall x\forall y(xRy \to yRx)$
transitiv: $\forall x\forall y\forall z\big((xRy \wedge yRz) \to xRz\big)$

Wir zeigen nun, dass die binäre Relation "$=$" reflexiv und symmetrisch ist; dass "$=$" auch transitiv ist wird in Aufgabe 2 gezeigt.

"$=$" ist reflexiv:

φ_0:	$x = x$	Instanziierung von L_{14}
φ_1:	$\forall x(x = x)$	aus φ_0 mit ($\forall$)

"$=$" ist symmetrisch:
Wir zeigen zuerst $\{x = y\} \vdash y = x$, d.h. $\mathbf{\Phi} \vdash y = x$ für $\mathbf{\Phi}$ die Menge mit der einzigen Formel $x = y$.

φ_0:	$(x = y \wedge x = x) \to (x = x \to y = x)$	Instanziierung von L_{15}
φ_1:	$x = x$	Instanziierung von L_{14}
φ_2:	$x = y$	$x = y \in \mathbf{\Phi}$
φ_3:	$x = x \to (x = y \to (x = y \wedge x = x))$	Instanziierung von L_5
φ_4:	$x = y \to (x = y \wedge x = x)$	aus φ_3 und φ_1 mit (MP)
φ_5:	$x = y \wedge x = x$	aus φ_4 und φ_2 mit (MP)
φ_6:	$x = x \to y = x$	aus φ_0 und φ_5 mit (MP)
φ_7:	$y = x$	aus φ_6 und φ_1 mit (MP)

Somit haben wir $\{x = y\} \vdash y = x$. Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM erhalten wir also

$$\vdash x = y \to y = x$$

und durch Verallgemeinerung erhalten wir schliesslich:

$$\vdash \forall x\forall y(x = y \to y = x)$$

1. AXIOMENSYSTEME UND SEMI-FORMALE BEWEISE

In diesem Kapitel werden die Axiome einiger Theorien aufgelistet und es wird der Begriff eines *semi-formalen* Beweises eingeführt.

AXIOMENSYSTEME

Gruppentheorie GT**.** Die Signatur der Gruppentheorie ist $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}} = \{\mathtt{e}, \circ\}$, wobei $\mathtt{e}$ ein Konstantensymbol und $\circ$ ein 2-stelliges Funktionssymbol ist.

Die Axiome der Gruppentheorie sind:

GT_0:	$\forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big)$	($\circ$ ist *assoziativ*)
GT_1:	$\forall x (\mathtt{e} \circ x = x)$	($\mathtt{e}$ ist *links-neutral*)
GT_2:	$\forall x \exists y (y \circ x = \mathtt{e})$	(jedes Element hat ein *links-Inverses*)

Strenggenommen sind die Erläuterungen in den Klammern nicht korrekt: Zum Beispiel kann das Funktionssymbol $\circ$ als *Symbol* nicht assoziativ sein. Erst, wenn das Funktions*symbol* $\circ$ in einem *Modell* $\mathbf{M}$ als 2-stellige *Funktion* $\circ^{\mathbf{M}} : A \times A \to A$ interpretiert wird, kann die Funktion $\circ^{\mathbf{M}}$ assoziativ sein, und das ist, was mit GT_0 gemeint ist.

Es sei nochmals erwähnt, dass es auf der syntaktischen (oder formalen) Ebene, auf der wir uns befinden, weder Konstanten, noch Funktionen oder Relationen gibt, sondern nur verschiedene, bedeutungslose Typen von Symbolen. Es gibt auch kein wahr und falsch, sondern nur syntaktisch korrekt geformte Terme und Formeln. Erst auf der semantischen Ebene, die im nächsten Kapitel behandelt wird, werden den Termen Objekte zugeordent, den Funktionssymbolen Funktionen, und den Relationssymbolen Relationen.

Ringtheorie RT**.** Die Signatur der Ringtheorie (für Ringe mit 1) ist $\mathscr{L}_{\mathsf{RT}} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, +, \cdot\}$, wobei $\mathtt{0}$ und $\mathtt{1}$ Konstantensymbole sind und $+, \cdot$ zwei 2-stellige Funktionssymbole sind.

Die Axiome der Ringtheorie (für Ringe mit 1) sind:

RT_0:	$\forall x \forall y \forall z \big(x + (y + z) = (x + y) + z\big)$	($+$ ist *assoziativ*)
RT_1:	$\forall x \forall y (x + y = y + x)$	($+$ ist *kommutativ*)
RT_2:	$\forall x (\mathtt{0} + x = x)$	($\mathtt{0}$ ist *links-neutral* bzgl. $+$)
RT_3:	$\forall x \exists y (y + x = \mathtt{0})$	(*links-Inverse* bzgl. $+$)
RT_4:	$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$	($\cdot$ ist *assoziativ*)
RT_5:	$\forall x (\mathtt{1} \cdot x = x \wedge x \cdot \mathtt{1} = x)$	($\mathtt{1}$ ist *neutral* bzgl. $\cdot$)
RT_6:	$\forall x \forall y \forall z \big(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big)$	($\cdot$ ist *links-distributiv* über $+$)
RT_7:	$\forall x \forall y \forall z \big((x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)\big)$	($\cdot$ ist *rechts-distributiv* über $+$)

Lässt man RT_5 weg, so erhält man auf der semantischen Ebene Ringe ohne 1, und verlangt man zusätzlich RT_8: $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$, so erhält man auf der semantischen Ebene *kommutative Ringe* (mit bzw. ohne 1).

Da die Operation $+$ mit RT_1 kommutativ ist, ist $\mathtt{0}$ auch rechts-neutral (also neutral) bzgl. $+$ und jedes Element hat bzgl. $+$ ein rechts-Inverses (also ein Inverses).

Körpertheorie KT**.** Die Signatur der Körpertheorie ist $\mathscr{L}_{\mathsf{KT}} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, +, \cdot\}$, wobei $\mathtt{0}$ und $\mathtt{1}$ Konstantensymbole sind und $+$, $\cdot$ zwei 2-stellige Funktionssymbole sind.

Die Axiome der Körpertheorie sind:

KT_0:	$\forall x \forall y \forall z \big(x + (y + z) = (x + y) + z\big)$	($+$ ist *assoziativ*)
KT_1:	$\forall x \forall y (x + y = y + x)$	($+$ ist *kommutativ*)
KT_2:	$\forall x (\mathtt{0} + x = x)$	($\mathtt{0}$ ist *link-neutral* bzgl. $+$)
KT_3:	$\forall x \exists y (y + x = \mathtt{0})$	(*links-Inverse* bzgl. $+$)
KT_4:	$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$	($\cdot$ ist *assoziativ*)
KT_5:	$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$	($\cdot$ ist *kommutativ*)
KT_6:	$\forall x (\mathtt{1} \cdot x = x)$	($\mathtt{1}$ ist *link-neutral* bzgl. $\cdot$)
KT_7:	$\forall x \exists y (x \neq \mathtt{0} \to y \cdot x = \mathtt{1})$	(*links-Inverse* bzgl. $\cdot$ für $x \neq \mathtt{0}$)
KT_8:	$\forall x \forall y \forall z \big(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big)$	($\cdot$ ist *links-distributiv* über $+$)
KT_9:	$\mathtt{0} \neq \mathtt{1}$	($\mathtt{0}$ ist verschieden von $\mathtt{1}$)

Da die Operationen $+$ und $\cdot$ mit KT_1 bzw. KT_5 kommutativ sind, sind links-neutrale Elemente auch rechts-neutral (also neutral), links-Inverse auch rechts-Inverse (also Inverse), und $\cdot$ ist auch *rechts-distributiv* über $+$.

Dichte Lineare Ordnungen DLO**.** Die Signatur der Theorie der dichten linearen Ordnungen ist $\mathscr{L}_{\mathsf{DLO}} = \{<\}$, wobei $<$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Die Axiome der Theorie der dichten linearen Ordnungen sind:

DLO_0:	$\forall x \neg (x < x)$	($<$ ist nicht *reflexiv*)
DLO_1:	$\forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \to x < z\big)$	($<$ ist *transitiv*)
DLO_2:	$\forall x \forall y \big(x < y \vee x = y \vee y < x\big)$	($<$ definiert eine *lineare* Ordnung)
DLO_3:	$\forall x \forall y \exists z \big(x < y \to (x < z \wedge z < y)\big)$	($<$ definiert eine *dichte* Ordnung)
DLO_4:	$\forall x \exists y \exists z \big(y < x \wedge x < z\big)$	(keine grössten bzw. kleinsten Elemente)

Peano-Arithmetik PA**.** Die Signatur der Peano-Arithmetik ist $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}} = \{\mathtt{0}, \mathtt{s}, +, \cdot\}$, wobei das Symbol $\mathtt{0}$ ein Konstantensymbol ist, $\mathtt{s}$ ein 1-stelliges Funktionssymbol ist, und $+$, $\cdot$ zwei 2-stellige Funktionssymbole sind.

Die Axiome der Peano-Arithmetik sind:

PA_0:	$\neg \exists x (\mathtt{s}x = \mathtt{0})$	($\mathtt{0}$ ist kein Nachfolger)
PA_1:	$\forall x \forall y (\mathtt{s}x = \mathtt{s}y \to x = y)$	($\mathtt{s}$ ist *injektiv*)
PA_2:	$\forall x (x + \mathtt{0} = x)$	(definiert $x + \mathtt{0}$)
PA_3:	$\forall x \forall y (x + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(x + y))$	(definiert $x + \mathtt{s}y$)
PA_4:	$\forall x (x \cdot \mathtt{0} = \mathtt{0})$	(definiert $x \cdot \mathtt{0}$)
PA_5:	$\forall x \forall y (x \cdot \mathtt{s}y = (x \cdot y) + x)$	(definiert $x \cdot \mathtt{s}y$)

Sei φ eine $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formel und ν eine Variable mit $\nu \in \mathrm{frei}(\varphi)$:

PA_6: $\big(\varphi(\mathtt{0}) \wedge \forall \nu (\varphi(\nu) \to \varphi(\mathtt{s}\nu))\big) \to \forall \nu \varphi(\nu)$

Beachte, dass PA_6 (im Gegensatz zu den Axiomen PA_0–PA_5) nicht ein einzelnes Axiom ist, sondern ein Axiomenschema, denn für jede $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formel φ mit einer freien Variablen erhalten wir eine Form von PA_6. Das Axiomenschema PA_6 wird **Induktions-Axiom** genannt und wird

für Induktionsbeweise benutzt. Weil PA_6 ein Axiomenschema ist, besteht das Axiomensystem PA der Peano-Arithmetik aus unendlich vielen Axiomen.

SEMI-FORMALE BEWEISE

Wie schon erwähnt werden formale Beweise relativ schnell sehr lang. Das liegt daran, dass in einem formalen Beweis nicht nur die relevanten, theorieabhängigen Zusammenhänge vorkommen, welche durch die nicht-logischen Axiome gegeben sind, sondern auch alle inner-logischen Strukturen, welche aus den logischen Axiomen folgen. Wenn wir nun in einem formalen Beweis alle Schritte, bei denen wir mit logischen Axiomen gewisse Formeln umgeformt haben, weglassen, so beruhen die ausgeführten Schritte im Wesentlichen nur noch auf den nicht-logischen Axiomen. Wir nennen solche Beweise **semi-formale Beweise** (diese Definition ist naturgemäss ebenfalls semi-formal).

Als Beispiel für einen semi-formalen Beweis zeigen wir $\mathsf{PA} \vdash \mathtt{s0} + \mathtt{s0} = \mathtt{ss0}$ (vgl. mit Aufgabe 4):

$$\underbrace{\mathtt{s0} + \mathtt{s0}}_{=\mathtt{s0}+\mathtt{s}(\mathtt{0})} \overset{\mathsf{PA}_3}{=} \mathtt{s}(\underbrace{\mathtt{s0} + \mathtt{0}}_{=\mathtt{s0}}) \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathtt{ss0}$$

Als Beispiel für einen semi-formalen Induktionsbeweis zeigen wir $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathtt{ss0}\cdot x = x+x\big)$:

- Wir definieren: $\varphi(x) :\equiv \mathtt{ss0} \cdot x = x + x$
- $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\mathtt{0})$: $\mathtt{ss0} \cdot x \overset{\mathsf{PA}_4}{=} \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathtt{0} + \mathtt{0}$
- $\mathsf{PA} \vdash \varphi(x) \to \varphi(\mathtt{s}x)$: Wir nehmen an, dass $\mathtt{ss0} \cdot x = x + x$ gilt, verwenden den bereits bewiesenen Satz $\mathtt{ss0} = \mathtt{s0} + \mathtt{s0}$, und verwenden implizit, dass $+$ assoziativ und kommutativ ist (siehe Aufgaben 6.(b) und 6.(d)).

  $$\mathtt{ss0} \cdot \mathtt{s}x \overset{\mathsf{PA}_5}{=} \underbrace{(\mathtt{ss0} \cdot x)}_{=x+x} + \underbrace{\mathtt{ss0}}_{=\mathtt{s0}+\mathtt{s0}} =$$
  $$(x + \mathtt{s0}) + (x + \mathtt{s0}) \overset{\mathsf{PA}_3}{=} \mathtt{s}(x + \mathtt{0}) + \mathtt{s}(x + \mathtt{0}) \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathtt{s}x + \mathtt{s}x$$

- Wir haben somit $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\mathtt{0})$ und $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\varphi(x) \to \varphi(\mathtt{s}x)\big)$, woraus wir (mit L_5) schliessen
  $$\mathsf{PA} \vdash \varphi(\mathtt{0}) \wedge \forall x\big(\varphi(x) \to \varphi(\mathtt{s}x)\big),$$
  und mit dem Induktionsaxiom PA_6 erhalten wir schliesslich:
  $$\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathtt{ss0} \cdot x = x + x\big)$$

2. MODELLE

SYNTAX UND SEMANTIK

Die mathematische Logik zerfällt in *Syntax* (Theorie der Beziehungen zwischen den Zeichen) und *Semantik* (Lehre der Bedeutung der Symbole, bzw. deren Interpretation). Im Vergleich zur Musik könnte man sagen, dass die Syntax (d.h. die formale Logik) der Partitur entspricht, welche Schwarz auf Weiss festhält, welche Noten gespielt werden sollen, während die Semantik der Umsetzung einer Partitur in hörbare Musik entspricht, welche sich zwar an die Partitur halten muss, in der Interpretation der Partitur aber frei ist. Obwohl die ganze Musik schon in der Partitur enthalten ist, so wird sie doch erst durch die Interpretation mit Leben erfüllt. Nehmen wir zum Beispiel als "Partitur" die Gruppenaxiome, so erhalten auch diese erst durch das betrachten konkreter Gruppen (d.h. erst durch die Interpretation) ihre Bedeutung. Bevor wir Terme und Formeln interpretieren und Modelle für axiomatische Theorien konstruieren, werden im Folgenden ein paar Parallelen zwischen der syntaktischen und der semantischen Ebene der Mathematik aufgezeigt.

Syntaktische Ebene	*Semantische Ebene*
Terme. Das sind Zeichenketten, welche nach den formalen Regeln (T0)–(T2) aufgebaut werden. Zum Beispiel ist das Konstantensymbol $\mathtt{e}$ der Gruppentheorie ein Term.	***Objekte***. Terme sind Namen für Objekte. Durch die Interpretation wird ein Term (Name) zu dem Objekt, welches er bezeichnet. Zum Beispiel wird das Konstantensymbol $\mathtt{e}$ durch die Interpretation zum Neutralelement e einer Gruppe, e ist also ein Objekt.
Formeln. Das sind Zeichenketten, welche nach den formalen Regeln (F0)–(F4) aufgebaut werden. Formeln sind weder wahr noch falsch; auf der syntaktischen Ebene gibt es keinen Wahrheitsbegriff!	***Aussagen***. Wird eine Formel interpretiert, so wird sie zu einer konkreten Aussage über bestimmte Objekte die entweder wahr oder falsch ist; und zwar unabhängig davon, ob wir ihren Wahrheitswert kennen.
Logische Axiome. Das sind Formeln, genauer Formelschemata, aus denen, mit Hilfe von Schlussregeln, weitere Formeln hergeleitet werden können.	***Tautologien***. Egal wie wir ein logisches Axiom interpretieren, die Aussage die wir erhalten ist immer wahr, eine sogenannte *Tautologie*. Die logischen Axiome sind so gewählt, dass aus ihnen alle Tautologien hergeleitet werden können.
Nicht-logische Axiome. Das sind Formeln (bzw. Formelschemata) welche nicht-logische Symbole enthalten, aus denen, mit Hilfe von Schlussregeln, weitere Formeln hergeleitet werden können. Zum Beispiel sind die Gruppenaxiome, welche die nicht-logischen Symbole $\mathtt{e}$ und $\circ$ enthalten, nicht-logische Axiome.	***Axiomensystem einer Theorie***. Das sind Axiome (d.h. Grundaussagen), welche am Anfang einer Theorie (z.B. Gruppentheorie) stehen. Die nicht-logischen Symbole werden dann in einem Modell der Theorie so interpretiert, dass alle Axiome wahr werden.

In der Mathematik sind wir nur in der formalen Logik auf der syntaktischen Ebene. Ansonsten arbeiten wir immer auf der semantischen Ebene. Selbst wenn wir zum Beispiel eine allgemeine Gruppe untersuchen, besteht diese Gruppe in unserer Vorstellung aus Elementen, also aus Objekten, wobei auf der Menge der Objekte eine konkrete binäre Operation (mit gewissen Eigenschaften) definiert ist. Sogar wenn wir mathematische Beweise führen, bleiben wir

auf der semantischen Ebene – wir können aber (wie wir später sehen werden) jeden richtigen mathematischen Beweis in einen formalen Beweis der syntaktischen Ebene übersetzen, dessen Korrektheit ein Computer überprüfen kann. Obwohl mathematische Theorien (wie z.B. die Gruppentheorie) üblicherweise auf nicht-logischen Axiomen beruhen, wird der Übergang von der syntaktischen Ebene der nicht-logischen Axiome (z.B. der Gruppenaxiome) auf die semantische Ebene (z.B. der konkreten Gruppen) im Allgemeinen nicht vollzogen. In der Gruppentheorie mag dies noch statthaft sein, denn wir können Modelle von endlichen Gruppen effektiv angeben. Wesentlich anders ist es aber bei der Mengenlehre oder der Peano-Arithmetik, denn es gibt kein umfassendes System, in welchem ein Modell der Mengenlehre oder der Peano-Arithmetik existiert.

STRUKTUREN, INTERPRETATIONEN, MODELLE

Sei $\mathscr{L}$ eine beliebige, aber festgelegte Signatur. Eine **$\mathscr{L}$-Struktur** $\mathbf{M}$ besteht aus einer nichtleeren Menge A, dem sogenannten **Bereich** von $\mathbf{M}$, zusammen mit einer Abbildung, welche jedem Konstantensymbol $c \in \mathscr{L}$ ein Element $c^{\mathbf{M}} \in A$ zuordnet, jedem n-stelligen Relationssymbol $R \in \mathscr{L}$ eine Menge von n-Tupeln $R^{\mathbf{M}} \subseteq A^n$ zuordnet, und jedem n-stelligen Funktionssymbol $F \in \mathscr{L}$ eine Funktion $F^{\mathbf{M}} : A^n \to A$ zuordnet.

Um auch Variablen zu interpretieren, definieren wir sogenannte Variablenbelegungen: Eine **Variablenbelegung j** in einer $\mathscr{L}$-Struktur $\mathbf{M}$ mit Bereich A, ist eine Abbildung, welche jeder Variablen ν ein Objekt $j(\nu) \in A$ zuordnet. Für eine Variable ν, ein Objekt $a \in A$ und eine Variablenbelegung j einer $\mathscr{L}$-Struktur $\mathbf{M}$ mit Bereich A, definieren wir zudem die Variablenbelegung $j\frac{a}{\nu}$ wie folgt:

$$j\tfrac{a}{\nu}(\nu') = \begin{cases} a & \text{falls } \nu' \equiv \nu, \\ j(\nu') & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine **$\mathscr{L}$-Interpretation $\mathbf{I}$** ist ein Paar $(\mathbf{M}, j)$ das aus einer $\mathscr{L}$-Struktur $\mathbf{M}$ und einer Variablenbelegung j in $\mathbf{M}$ besteht.

Für eine Interpretation $\mathbf{I} = (\mathbf{M}, j)$ und ein Objekt $a \in A$ definieren wir:

$$\mathbf{I}\,\tfrac{a}{\nu} := \big(\mathbf{M}, j\tfrac{a}{\nu}\big)$$

Bezüglich einer $\mathscr{L}$-Interpretation $\mathbf{I} = (\mathbf{M}, j)$, wobei A der Bereich von $\mathbf{M}$ ist, ordnen wir jedem $\mathscr{L}$-Term τ ein Objekt $\mathbf{I}(\tau) \in A$ wie folgt zu:

- Für Variablen ν sei $\mathbf{I}(\nu) := j(\nu)$.
- Für Konstantensymbole $c \in \mathscr{L}$ sei $\mathbf{I}(c) := c^{\mathbf{M}}$.
- Für ein n-stelliges Funktionssymbol $F \in \mathscr{L}$ und $\mathscr{L}$-Terme $\tau_1, \ldots, \tau_n$, sei

$$\mathbf{I}\big(F\tau_1 \cdots \tau_n\big) := F^{\mathbf{M}}\big(\mathbf{I}(\tau_1), \ldots, \mathbf{I}(\tau_n)\big)\,.$$

Nun sind wir in der Lage, mit $\mathscr{L}$-Interpretationen auch Formeln zu interpretieren. Mehr noch, wir können sogar definieren, wann eine Formel φ bezüglich einer bestimmten Interpretation $\mathbf{I}$ wahr ist, bzw. wann eine Formel φ in $\mathbf{I}$ gilt – was wir mit $\mathbf{I} \models \varphi$ bezeichnen.

Ist φ eine Formel, so ist sie aus den Regeln (F0)–(F4) entstanden, d.h. φ ist von der Form $\tau_1 = \tau_2$, $R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\neg\psi$, $\psi_1 \wedge \psi_2$, $\psi_1 \vee \psi_2$, $\psi_1 \to \psi_2$, $\exists\nu\psi$ oder $\forall\nu\psi$. Wir definieren nun $\mathbf{I} \models \varphi$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} \models \tau_1 = \tau_2 \quad &\iff \quad \mathbf{I}(\tau_1) \text{ IST DASSELBE OBJEKT WIE } \mathbf{I}(\tau_2) \\
\mathbf{I} \models R(\tau_1, \ldots, \tau_n) \quad &\iff \quad \big(\mathbf{I}(\tau_1), \ldots, \mathbf{I}(\tau_n)\big) \text{ IST EIN ELEMENT DER MENGE } R^{\mathbf{M}} \\
\mathbf{I} \models \neg\psi \quad &\iff \quad \text{NICHT } \mathbf{I} \models \psi \\
\mathbf{I} \models \psi_1 \wedge \psi_2 \quad &\iff \quad \mathbf{I} \models \psi_1 \text{ UND } \mathbf{I} \models \psi_2 \\
\mathbf{I} \models \psi_1 \vee \psi_2 \quad &\iff \quad \mathbf{I} \models \psi_1 \text{ ODER } \mathbf{I} \models \psi_2 \\
\mathbf{I} \models \psi_1 \to \psi_2 \quad &\iff \quad \text{FALLS } \mathbf{I} \models \psi_1 \text{ DANN } \mathbf{I} \models \psi_2 \\
\mathbf{I} \models \exists\nu\psi \quad &\iff \quad \text{ES EXISTIERT EIN } a \text{ IN } A \text{ MIT } \mathbf{I}\tfrac{a}{\nu} \models \psi \\
\mathbf{I} \models \forall\nu\psi \quad &\iff \quad \text{FÜR ALLE } a \text{ IN } A \text{ GILT } \mathbf{I}\tfrac{a}{\nu} \models \psi
\end{aligned}
$$

Beachte, dass für jede $\mathscr{L}$-Interpretation $\mathbf{I}$ und für jede $\mathscr{L}$-Formel φ gilt:

$$\textit{entweder} \quad \mathbf{I} \models \varphi \quad \textit{oder} \quad \mathbf{I} \models \neg\varphi\,.$$

Mit anderen Worten, entweder ist eine Formel in einer Interpretation wahr, d.h. $\mathbf{I} \models \varphi$, oder die Formel ist nicht wahr bzw. falsch, d.h. $\mathbf{I} \not\models \varphi$, dann ist ihre Negation $\neg\varphi$ wahr, d.h. $\mathbf{I} \models \neg\varphi$

Sei nun $\mathscr{L}$ eine beliebige Signatur, φ eine $\mathscr{L}$-Formel und M eine $\mathscr{L}$-Struktur. Dann ist M **ein Modell von $\boldsymbol{\varphi}$**, in Zeichen $\mathrm{M} \models \varphi$, falls für *jede* Variablenbelegung j gilt: $(\mathrm{M}, j) \models \varphi$. Ist $\boldsymbol{\Phi}$ eine Menge von $\mathscr{L}$-Formeln, dann ist M **ein Modell von $\boldsymbol{\Phi}$**, in Zeichen $\mathrm{M} \models \boldsymbol{\Phi}$, falls für jede Formel $\varphi \in \boldsymbol{\Phi}$ gilt: $\mathrm{M} \models \varphi$.

Zum Beispiel sei $\mathscr{L} = \{\mathsf{c}, f\}$, wobei c ein Konstantensymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Weiter sei $\boldsymbol{\Phi}$ die Menge, welche aus folgenden beiden $\mathscr{L}$-Sätzen besteht:

$$\underbrace{\forall x\big(x = \mathsf{c} \vee x = f(\mathsf{c})\big)}_{\varphi_1} \quad \text{und} \quad \underbrace{\exists x(x \neq \mathsf{c})}_{\varphi_2}$$

Wir konstruieren nun zwei Modelle M_1 und M_2 (bzw. zwei $\mathscr{L}$-Strukturen) mit demselben Bereich A, so dass $\mathrm{M}_1 \models \boldsymbol{\Phi}$ und $\mathrm{M}_2 \not\models \boldsymbol{\Phi}$: Zuerst wählen wir $A := \{0, 1\}$ und definieren

$$\mathsf{c}^{\mathrm{M}_1} := 0, \quad f^{\mathrm{M}_1}(0) := 1, \quad f^{\mathrm{M}_1}(1) := 0,$$

$$\mathsf{c}^{\mathrm{M}_2} := 0, \quad f^{\mathrm{M}_2}(0) := 0, \quad f^{\mathrm{M}_2}(1) := 1.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass der Satz φ_2 in beiden Modellen gilt, wohingegen φ_1 nur im Modell M_1 gilt. Insbesonder haben wir $\mathrm{M}_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ und $\mathrm{M}_2 \models \neg\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

DER KORREKTHEITSSATZ

Der Korrektheitssatz besagt, dass jeder Satz, welche aus einer Menge T von Sätzen beweisbar ist, in jedem Modell von T wahr ist.

KORREKTHEITSSATZ. *Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur, sei T eine Menge von $\mathscr{L}$-Sätzen, sei σ ein $\mathscr{L}$-Satz, der aus T beweisbar ist (d.h. $T \vdash \sigma$), und sei M ein beliebiges Modell von T (d.h. $\mathrm{M} \models T$). Dann gilt $\mathrm{M} \models \sigma$.*

Begründung. Sowohl die logischen Axiome als auch die Sätze aus T sind wahr in jedem Modell $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$, und mit den Schlussregeln erhalten wir aus wahren Formeln immer wahre Formeln. Somit ist auch die letzte Formel σ eines formalen Beweises wahr in M, d.h. es gilt $\mathrm{M} \models \sigma$.
Folgerung.

- Ist σ ein Satz und gilt $\mathsf{T} \vdash \sigma$, dann gilt für jedes Modell $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$, $\mathrm{M} \models \sigma$.

  Begründung. Hätten wir ein Model $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$, in dem σ nicht gilt, so hätten wir $\mathrm{M} \models \neg\sigma$, was aber dem Korrektheitssatz widerspricht.

DER GÖDEL'SCHE VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ

Eine Menge T von Sätzen heisst **konsistent** (oder **widerspruchsfrei**), falls es keine Formel φ gibt mit $\mathsf{T} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Ist T nicht konsistent so heisst T **inkonsistent**. Aus Aufgabe 0.(f) folgt, dass für eine inkonsistente Theorie T gilt: $\mathsf{T} \vdash \psi$ für jede Formel ψ.

Der Gödel'sche Vollständigkeitssatz besagt nun, dass jede konsistente Menge von Sätzen ein Modell besitzt. Etwas allgemeiner formuliert besagt der Gödel'sche Vollständigkeitssatz folgendes:

GÖDEL'SCHER VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ. *Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur, sei T eine Menge von $\mathscr{L}$-Sätzen, und sei σ ein $\mathscr{L}$-Satz mit $T \nvdash \sigma$ (d.h. T ist konsistent). Dann existiert ein Modell $\mathrm{M} \models T$ mit $\mathrm{M} \models \neg\sigma$.*

Folgerungen.

- Ist T eine konsistente Menge von Sätzen, so hat T ein Modell.

  Begründung. Ist T konsistent, so existiert ein Satz σ, der nicht aus T beweisbar ist, d.h. $\mathsf{T} \nvdash \sigma$, und somit existiert auch ein Model $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$.

- Ist σ ein Satz und gilt für jedes Modell $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$, $\mathrm{M} \models \sigma$, dann gilt $\mathsf{T} \vdash \sigma$.

  Begründung. Hätten wir $\mathsf{T} \nvdash \sigma$, so gäbe es ein Model $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$ mit $\mathrm{M} \models \neg\sigma$.

- Ist σ ein Satz und gilt $\mathsf{T} \nvdash \sigma$ und $\mathsf{T} \nvdash \neg\sigma$, so existieren zwei Modelle $\mathrm{M}_1 \models \mathsf{T}$ und $\mathrm{M}_2 \models \mathsf{T}$ mit $\mathrm{M}_1 \models \neg\sigma$ und $\mathrm{M}_2 \models \sigma$.

  Begründung. Mit $\mathsf{T} \nvdash \sigma$ gibt es ein Modell $\mathrm{M}_1 \models \mathsf{T} + \neg\sigma$, und mit $\mathsf{T} \nvdash \neg\sigma$ gibt es ein Modell $\mathrm{M}_2 \models \mathsf{T} + \sigma$.

- Zusammen mit dem Korrektheitssatz erhalten wir schliesslich folgende Aussage:

  > *Ein Satz σ ist genau dann aus einer Menge von Sätzen T formal beweisbar, wenn σ in jedem Modell von T gilt.*

BEMERKUNGEN ZU MATHEMATISCHEN BEWEISEN

Um zu zeigen, dass ein Satz σ aus einem Axiomensystem T beweisbar ist, führen wir üblicherweise keine formalen Beweise, sondern benutzen den Gödel'schen Vollständigkeitssatz und zeigen, dass in jedem Modell von T der Satz σ gilt (d.h. wahr ist). Mit dem Gödel'schen Vollständigkeitssatz ist dann der Satz σ aus dem Axiomensystem T formal beweisbar. Dieses Vorgehen ist ein *mathematischer Beweis* von σ aus T.

Wenn wir zum Beispiel aus den Axiomen der Gruppentheorie GT einen Satz σ zeigen wollen, so gehen wir wie folgt vor: Wir nehmen irgend ein Modell von GT, also irgend eine Gruppe $(G, \mathsf{e}, \circ)$, und zeigen, dass der Satz σ in $(G, \mathsf{e}, \circ)$ gilt, d.h. $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \sigma$.

Ist zum Beispiel $\sigma \equiv \forall x \forall y \big(y \circ x = \mathsf{e} \ \rightarrow \ x \circ y = \mathsf{e} \big)$, so nehmen wir irgend eine Gruppe $(G, \mathsf{e}, \circ)$ und irgend ein Element $x \in G$, und zeigen, dass jedes links-Inverse von x auch rechts-Inverses von x ist:

- Weil $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \mathsf{GT}_2$, existiert zu jedem Element in G ein links-inverses Element. Sei nun $x \in G$, sei $\bar{x} \in G$ ein link-Inverses von x und sei $\bar{\bar{x}} \in G$ ein links-inverses von $\bar{x}$. In $(G, \mathsf{e}, \circ)$ gilt somit

$$\bar{\bar{x}} \circ \bar{x} = \mathsf{e} \quad \text{und} \quad \bar{x} \circ x = \mathsf{e}.$$

- Weil $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \mathsf{GT}_1$, gilt in $(G, \mathsf{e}, \circ)$ auch

$$x \circ \bar{x} = \mathsf{e} \circ (x \circ \bar{x}) = (\bar{\bar{x}} \circ \bar{x}) \circ (x \circ \bar{x}).$$

- Weil $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \mathsf{GT}_0$, gilt in $(G, \mathsf{e}, \circ)$ auch

$$(\bar{\bar{x}} \circ \bar{x}) \circ (x \circ \bar{x}) = \bar{\bar{x}} \circ \big(\bar{x} \circ (x \circ \bar{x}) \big) = \bar{\bar{x}} \circ \big((\bar{x} \circ x) \circ \bar{x} \big) = \bar{\bar{x}} \circ (\mathsf{e} \circ \bar{x}).$$

- Weil $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \mathsf{GT}_1$, gilt in $(G, \mathsf{e}, \circ)$ auch

$$\bar{\bar{x}} \circ (\mathsf{e} \circ \bar{x}) = \bar{\bar{x}} \circ \bar{x} = \mathsf{e},$$

  und somit gilt $x \circ \bar{x} = \mathsf{e}$ in $(G, \mathsf{e}, \circ)$.

- Weil nun die Gruppe $(G, \mathsf{e}, \circ)$ und das Element $x \in G$ beliebig waren, gilt in jeder Gruppe $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \mathsf{GT}$, das jedes links-inverse eines beliebigen Elements $x \in G$ auch rechts-inverses von x ist.

Beachte, dass wir in diesem mathematischen Beweis nur über die Wahrheit von Aussagen im Modell $(G, \mathsf{e}, \circ)$ argumentiert haben. Insbesondere haben wir die Axiome der Gruppentheorie – und implizit die logischen Axiome – nicht dazu benutzt, logische Schlüsse zu ziehen, sondern nur um zu zeigen, dass bestimmte Aussagen in $(G, \mathsf{e}, \circ)$ wahr sind.

Ein mathematischer Beweis benutzt also immer implizit den Gödel'schen Vollständigkeitssatz. Es ist natürlich auch möglich, dass ein gewisser Satz σ in machen Modellen einer Theorie T wahr und in anderen Modellen falsch ist. Seien zum Beispiel $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ zwei Modelle von T und sei σ ein Satz für den gilt $\mathbf{M}_1 \models \sigma$ und $\mathbf{M}_2 \not\models \sigma$, d.h. $\mathbf{M}_2 \models \neg\sigma$. Dann folgt aus dem Korrektheitssatz, dass gilt: $\mathsf{T} \nvdash \sigma$ und $\mathsf{T} \nvdash \neg\sigma$. Ein Satz σ, der aus einer Theorie T weder beweisbar noch widerlegbar ist, ist **unabhängig** von T. Für die Theorie GT ist zum Beispiel $\sigma \equiv \forall x \forall y (x \circ y = y \circ x)$ ein solcher Satz. Beachte, ist σ unabhängig von T, so ist sowohl $\mathsf{T} + \sigma$ wie auch $\mathsf{T} + \neg\sigma$ konsistent; insbesondere hat sowohl $\mathsf{T} + \sigma$ wie auch $\mathsf{T} + \neg\sigma$ ein Modell.

3. DIE AXIOME DER ZERMELO-FRAENKEL'SCHEN MENGENLEHRE

Die Signatur der Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre ZF ist $\mathscr{L}_{\mathsf{ZF}} = \{\in\}$, wobei $\in$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Anstelle von $\in yx$ schreiben wir $y \in x$ und sagen "y ist Element von x", und für $\neg(y \in x)$ schreiben wir $y \notin x$.

DAS AXIOMENSYSTEM VON ZERMELO

Im Jahr 1905 begann Ernst Zermelo die Mengenlehre zu axiomatisieren und publizierte 1908 sein erstes Axiomensystem, das aus folgenden sieben Axiomen bestand:

(a) *Axiom der Bestimmtheit*
besagt, dass eine Menge durch ihre Elemente bestimmt ist

(b) *Axiom der Elementarmengen*
besagt, dass es gewisse Mengen gibt, wie z.B. leere Menge oder Paarmenge

(c) *Axiom der Aussonderung*
besagt, dass aus Mengen gewisse Teilmengen ausgesondert werden können

(d) *Axiom der Potenzmenge*
besagt, dass zu jeder Menge die Menge ihrer Teilmengen existiert

(e) *Axiom der Vereinigung*
besagt, dass wir Mengen von Mengen vereinigen können

(f) *Axiom der Auswahl*
besagt, dass cartesische Produkte nicht-leerer Mengen nicht leer sind

(g) *Axiom des Unendlichen*
besagt, dass es eine Menge gibt, die nicht endlich ist.

Die Axiome (a) – (e) und Axiom (g) (d.h. alle Axiome ausser dem Auswahlaxiom), sind die Axiome $0-6$ der *Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre*, welche im folgenden Abschnitt eingeführt werden.

DIE AXIOME $0-6$

0. Axiom der leeren Menge.

$$\exists x \forall z (z \notin x)$$

Das *Axiom der leeren Menge* besagt, dass eine Menge existiert, welche keine Elemente besitzt. Insbesondere existiert mindestens eine Menge, nämlich eine leere Menge.

1. Extensionalitätsaxiom.

$$\forall x \forall y \big(\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \big)$$

Das *Extensionalitätsaxiom* besagt, dass zwei Mengen, welche dieselben Elemente besitzen, identisch sind. Die Umkehrung dieser Implikation folgt aus dem logischen Axiom L_{15}.

Aus dem Axiom der leeren Menge folgt mit dem Extensionalitätsaxiom, dass die **leere Menge** eindeutig ist; diese wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Wir definieren nun das binäre Relationssymbol $\subseteq$ für **Teilmenge** wie folgt:

$$y \subseteq x :\Longleftrightarrow \forall z (z \in y \rightarrow z \in x)$$

Beachte, dass $\emptyset \subseteq x$ für jede Menge x gilt. Weiter definieren wir das binäre Relationssymbol $\subsetneq$ für **echte Teilmenge** durch

$$y \subsetneq x :\Longleftrightarrow\ y \subseteq x \wedge y \neq x\,.$$

2. Paarmengenaxiom.

$$\forall x \forall y \exists u \forall z \big(z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y)\big)$$

Das *Paarmengenaxiom* besagt, dass für alle Mengen x und y immer eine Menge u existiert, welche nur die Mengen x und y als Elemente besitzt. Für die Menge, welche nur x und y enthält, schreiben wir $\{x, y\}$. Beachte, dass aus dem Extensionalitätsaxiom die Gleichheit $\{x, y\} = \{y, x\}$ folgt, und dass für $x = y$ die Gleichheit $\{x, y\} = \{x\}$ gilt.

Mit dem Paarmengenaxiom können wir nun wie folgt auch **geordnete Paare** definieren:

$$\langle x, y\rangle := \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$$

Es lässt sich einfach zeigen, dass gilt

$$\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \iff x = x' \wedge y = y',$$

und somit können wir das binäre Funktionssymbol $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ wie folgt definieren:

$$\langle x, y\rangle = u :\Longleftrightarrow\ \forall z\big(z \in u \leftrightarrow \big(z = \{x\} \vee z = \{x, y\}\big)\big)$$

Analog könnten wir auch geordnete Tripel, Quadrupel, etc., definieren, doch das wird einfacher, wenn wir mehr Axiome zur Verfügung haben.

3. Vereinigungsaxiom.

$$\forall x \exists u \forall z \big(z \in u \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w)\big)$$

Das *Vereinigungsaxiom* besagt, dass zu jeder Menge x eine Menge u existiert, welche alle Mengen enthält, welche Elemente von Elementen von x sind.

Mit dem Vereinigungsaxiom können wir die **unäre Vereinigungsfunktion** $\bigcup$ wie folgt definieren:

$$\bigcup x = u :\Longleftrightarrow\ \forall z\big(z \in u \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w)\big)$$

Zum Beispiel gilt $x = \bigcup\{x\}$. Mit Hilfe des Vereinigungsaxioms und des Paarmengenaxioms können wir die **binäre Vereinigungsfunktion** $\cup$ wie folgt definieren:

$$x \cup y := \bigcup\{x, y\}$$

Ebenfalls mit dem Vereinigungsaxiom und dem Paarmengenaxiom, und durch die Definition $x + 1 := x \cup \{x\}$, können wir zum Beispiel folgende Mengen bilden:

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset \\ 1 &:= 0 + 1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} \\ 2 &:= 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} \\ 3 &:= 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Allgemein können wir jede natürliche Zahl n identifizieren mit der Menge $\{0, \ldots, n-1\}$, wobei die leeren Menge $\emptyset$ der Zahl 0 entspricht. Diese Konstruktion führt zu folgender Definition: Eine Menge x heisst **induktiv**, falls

$$\forall y(y \in x \to (y \cup \{y\}) \in x).$$

Formal definieren wir ein 1-stelliges Relationssymbol ind wie folgt:

$$\mathrm{ind}(x) :\Longleftrightarrow\ \forall y\big(y \in x \to \big(y \cup \{y\}\big) \in x\big)$$

Einerseits ist die leere Menge $\emptyset$ induktiv, d.h. $\mathrm{ind}(\emptyset)$. Andererseits können wir aus den bisherigen Axiomen nicht beweisen, dass es auch nicht-leere induktive Mengen gibt – dies wird aber durch das nächste Axiom garantiert.

4. Unendlichkeitsaxiom.

$$\exists I\big(\emptyset \in I \wedge \mathrm{ind}(I)\big)$$

Das *Unendlichkeitsaxiom* besagt, dass es eine nicht-leere induktive Menge gibt, welche die leere Menge enthält. Jede der oben konstruierten Mengen $0, 1, 2, 3 \ldots$ (d.h. jede natürliche Zahl) gehört zu jeder induktiven Menge I welche $\emptyset$ enthält.

5. Aussonderungsaxiom (Axiomenschema). Für jede Formel $\varphi(z)$ mit der einzigen freien Variable z, ist der folgend Satz ein Axiom:

$$\forall x \exists y \forall z\big(z \in y \leftrightarrow \big(z \in x \wedge \varphi(z)\big)\big)$$

Das *Aussonderungsaxiom* besagt, dass zu jeder Formel $\varphi(z)$ und jeder Menge x eine Menge y existiert, so dass y genau diejenigen Elemente z von x enthält, für die $\varphi(z)$ gilt. Etwas informeller können wir das Aussonderungsaxiom (bzgl. φ) wie folgt ausdrücken: Für jede Menge x und jede Formel φ ist

$$\{z \in x : \varphi(z)\}$$

eine Menge. Beachte, dass uns das Aussonderungsaxiom nur erlaubt, aus bestehenden Mengen gewisse Elemente auszusondern und die "Kollektion" der ausgesonderten Elemente bildet dann eine Menge. Wir können aber im Allgemeinen keine Kollektionen von Mengen mit einer bestimmten Eigenschaft bilden, bzw. solche Kollektionen sind im Allgemeinen keine Mengen. Zum Beispiel ist für eine Menge x und $\varphi(z) \equiv z \notin z$, $\{z \in x : \varphi(z)\}$ eine Menge, aber die Kollektion $\{z : \varphi(z)\}$ ist *keine* Menge.

Mit dem Aussonderungsaxiom können wir nun auch Durchschnitt und Differenz von Mengen definieren: Seien x_0 und x_1 Mengen und sei $\varphi(z) :\equiv z \in x_0$ (x_0 ist ein Parameter von φ). Dann definieren wir das binäre Funktionssymbol $\cap$ für **Durchschnitt** wie folgt:

$$x_0 \cap x_1 = y :\Longleftrightarrow\ y = \{z \in x_1 : \varphi(z)\}$$

Um Formeln besser lesbar zu machen, definieren wir:

$$\exists x \in w\ \varphi(x) \ :\Longleftrightarrow\ \exists x\big(x \in w\ \wedge\ \varphi(x)\big)$$

$$\forall x \in w\ \varphi(x) \ :\Longleftrightarrow\ \forall x\big(x \in w \to \varphi(x)\big)$$

Analog zum Vereinigungssymbol $\bigcup$, und mit Hilfe von diesem, definieren wir mit der Formel $\varphi(u) :\equiv \forall z \in x\ (u \in z)$ das unäre Durchschnittssymbol $\bigcap$ durch

$$\bigcap x = y :\Longleftrightarrow\ y = \Big\{u \in \bigcup x : \varphi(u)\Big\}.$$

Beachte, dass die Gleichheit $x \cap y = \bigcap\{x, y\}$ gilt. Mit $\varphi(z) :\equiv z \notin y$ können wir das binäre Funktionssymbol $\setminus$ für **Mengendifferenz** definieren durch

$$x \setminus y = u :\Longleftrightarrow\ u = \{z \in x : \varphi(z)\}.$$

6. Potenzmengenaxiom.

$$\forall x \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow y \subseteq x)$$

Das *Potenzmengenaxiom* besagt, dass zu jeder Menge x eine Menge $\mathscr{P}(x)$ existiert, die sogenannte **Potenzmenge** von x, deren Elemente die Teilmengen von x sind. Weil mit dem Extensionalitätsaxiom die Potenzmenge von x eindeutig ist, können wir formal das 1-stellige Funktionssymbol $\mathscr{P}$ wie folgt definieren:

$$\mathscr{P}(x) = z :\Longleftrightarrow \forall y (y \in z \leftrightarrow y \subseteq x)$$

DEFINITIONEN UND KONSTRUKTIONEN AUS DEN AXIOMEN $0-6$

Die Menge ω. Als erstes definieren (bzw. konstruieren) wir mit den Axiomen $0-6$ die Menge ω als die kleinste induktive Menge, welche $\emptyset$ enthält: Mit dem Unendlichkeitsaxiom existiert eine induktive Menge I_0 welche $\emptyset$ enthält. Mit dem Potenzmengenaxiom bilden wir die Potenzmenge $\mathscr{P}(I_0)$ und mit dem Aussonderungsaxiom bilden wir dann zuerst die Menge aller $X \in \mathscr{P}(I_0)$, die induktiv sind und $\emptyset$ enthalten, und bilden dann den Durchschnitt all dieser Mengen X. Die Menge ω ist also wie folgt definiert:

$$\omega := \bigcap \big\{ X \in \mathscr{P}(I_0) : \emptyset \in X \wedge \mathrm{ind}(X) \big\}$$

Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass der Durchschnitt induktiver Mengen, welche $\emptyset$ enthalten, wieder eine induktive Menge ist, welche $\emptyset$ enthält; und weil ω in jeder solchen Menge enthalten ist, ist ω tatsächlich die kleinste induktive Menge, die $\emptyset$ enthält.

Die Menge ω ist auch die kleinste Menge, welche die "Menge" $\mathbb{N}$ (im naiven Sinn) der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ (wie wir sie oben definiert haben) enthält, d.h. "$\mathbb{N} \subseteq \omega$". Es sei hier erwähnt, dass aus dem *Gödel'schen Unvollständigkeitssatz* folgt, dass $\mathbb{N} = \omega$ nicht beweisbar ist – insbesondere ist die Existenz der Menge $\mathbb{N}$ formal nicht beweisbar. Da wir aber andererseits auch nicht "$\mathbb{N} \subsetneq \omega$" zeigen können, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Mengen $\mathbb{N}$ und ω identisch sind – insbesondere ist die Menge $\mathbb{N}$ aus den Axiomen der Mengenlehre konstruierbar.

Cartesische Produkte. Für beliebige Mengen A und B definieren wir das binäre Funktionssymbol $\times$ durch

$$A \times B := \big\{ \langle x, y \rangle : x \in A \wedge y \in B \big\}$$

wobei $\langle x, y \rangle = \big\{ \{x\}, \{x, y\} \big\}$ ist. Die Menge $A \times B$ heisst **cartesisches Produkt** von A und B. Beachte, dass das cartesische Produkt $A \times B$ von A und B eine Teilmenge der Menge $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$ ist.

Funktionen. Mit Hilfe cartesischer Produkte können wir nun **Funktionen** $f : A \to B$, welche jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuordnen, als Teilmengen von $A \times B$ auffassen. Die Menge aller Funktionen $f : A \to B$, welche wir mit ${}^A B$ bezeichnen, ist definiert durch

$${}^A B := \big\{ f \subseteq A \times B : \forall x \in A \; \exists! y \in B \; \big(\langle x, y \rangle \in f \big) \big\}$$

wobei $\exists! y$ bedeutet, dass es genau ein y gibt, d.h. $\exists! y \varphi(y)$ ist eine abgekürzte Schreibweise für

$$\exists y \big(\varphi(y) \wedge \forall z (\varphi(z) \to z = y) \big).$$

Für Funktionen $f \in {}^A B$ schreiben wir üblicherweise $f : A \to B$ und für $\langle x, y \rangle \in f$ schreiben wir üblicherweise $f(x) = y$. Ist die Menge A ein cartesisches Produkt, zum Beispiel $A =$

$C_1 \times C_2$, so ist $f : A \to B$ eine 2-stellige Funktion. Wir können auch injektive, surjektive oder bijektive Funktionen definieren, zum Beispiel:

$$f \in {}^{A}B \text{ ist injektiv } \iff \forall x, x' \in A\, \forall y \in B\, \big((\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x', y\rangle \in f) \to x = x'\big)$$

Eine Menge A heisst **endlich**, falls eine Bijektion $f : n \to A$ existiert für ein $n \in \omega$. Beachte, dass diese Definition von "endlich" nur dann mit dem richtigen Endlichkeitsbegriff übereinstimmt, wenn $\mathbb{N} = \omega$. Eine Menge A heisst **abzählbar**, falls eine Surjektion $f : \omega \to A$ existiert, andernfalls heisst A **überabzählbar**. Beachte, dass insbesondere jede endliche Menge abzählbar ist.

Cartesische Produkte und Relationen. Mit Hilfe von Funktionen können wir nun auch allgemeine cartesische Produkte definieren: Seien A_ι Mengen für jedes $\iota \in I$ (für irgend eine Indexmenge I). Dann ist für $A := \bigcup\{A_\iota : \iota \in I\}$, das **cartesische Produkt** $\bigtimes_{\iota\in I} A_\iota$ der Mengen A_ι ($\iota \in I$) die Menge aller Funktionen $f \in {}^{I}A$ die aus jedem A_ι ein Element auswählen, also:

$$\bigtimes_{\iota\in I} A_\iota := \Big\{ f \in {}^{I}A : \forall \iota \in I \big(f(\iota) \in A_\iota\big) \Big\}$$

Gilt für alle $\iota \in I$, $A_\iota = A$ (für eine Menge A), dann ist $\bigtimes_{\iota\in I} A_\iota = {}^{I}A$. Ist $I = n$ für ein $n \in \omega$, dann schreiben wir auch A^n anstelle von ${}^{n}A$ und wir identifizieren ${}^{n}A$ mit der Menge

$$A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n\text{-mal}}.$$

Mit Hilfe endlicher cartesischer Produkte können wir nun auch Relationen definieren: Für eine Menge A und ein $n \in \omega$, ist $R \subseteq A^n$ eine ***n*-stellige Relation** auf A.

Zwei Beispiele für Ordnungsrelationen:

- Eine binäre Relation R auf A ist eine **lineare Ordnung** auf A, falls R transitiv ist und für alle Elemente $x, y \in A$ *Trichotomie* gilt (d.h. entweder xRy, oder $x = y$, oder yRx).
- Eine lineare Ordnung R auf A ist eine **Wohlordnung** auf A, falls jede nicht-leere Teilmenge $S \subseteq A$ ein R-minimales Element besitzt, d.h. es existiert ein $x_0 \in S$, sodass für alle $y \in S$ gilt $\neg yRx_0$. Beachte, dass, weil R eine lineare Ordnung ist, das R-minimale Element x_0 eindeutig ist. Falls eine Wohlordnung R auf der Menge A existiert, so sagen wir, dass A **wohlordenbar** ist.

Die Frage, ob jede Menge wohlordenbar ist, wird durch das *Auswahlaxiom*, welches wir später behandeln, beantwortet.

Die Axiome 7 & 8

Das nächste Axiom stammt von Abraham Fraenkel.

7. Ersetzungsaxiom (Axiomenschema). Um dieses Axiom zu formulieren, führen wir den Begriff der *Klassenfunktion* ein: Sei $\varphi(x, y)$ eine Formel mit $x, y \in \mathrm{frei}(\varphi)$, so dass gilt

$$\forall x\, \exists! y\, \varphi(x, y).$$

Dann ist das 1-stellige Funktionssymbol F, definiert durch

$$F(x) = y :\iff \varphi(x, y),$$

eine **Klassenfunktion**. Das *Ersetzungsaxiom* besagt, dass für jede Klassenfunktion F und für jede Menge A, das Bild von A unter F eine Menge ist, d.h.

$$F[A] := \big\{F(x) : x \in A\big\}$$

ist eine Menge. Etwas kürzer ausgedrückt: *Bilder von Mengen unter Funktionen sind Mengen.*

Mit dem Ersetzungsaxiom können wir Mengen wie zum Beispiel

$$\big\{\mathscr{P}(x) : x \in \mathscr{P}(\omega)\big\}$$

bilden; setze $A = \mathscr{P}(\omega)$ und $F(x) := \mathscr{P}(x)$.

Das letzte Axiome ist zwar für die Mengenlehre wichtig, hat aber auf die allgemeine Mathematik keinen Einfluss.

8. Fundierungsaxiom.

$$\forall x \left(x \neq \emptyset \to \exists y\big(y \in x \wedge (y \cap x = \emptyset)\big)\right).$$

Das *Fundierungsaxiom* besagt, das jede Menge wohlfundiert ist, d.h. jede nicht-leere Menge x besitzt ein Element $y \in x$, sodass kein Element von y ein Element von x ist.

Mit dem Fundierungsaxiom erhalten wir, dass es keine unendlich absteigenden Sequenzen der Form

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots$$

gibt, denn sonst würde die Menge $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ dem Fundierungsaxiom widersprechen. Insbesondere gibt es keine Menge x für die $x \in x$ gilt, und es gibt auch keine Zyklen wie zum Beispiel $x_0 \in x_1 \in \cdots \in x_n \in x_0$.

Das Axiomensystem, bestehend aus den Axiomen $0-6$ von Zermelo, dem Ersetzungsaxiom von Fraenkel, sowie dem Fundierungsaxiom, bildet die Axiome der **Zermelo–Fraenkel'schen Mengenlehre** und wird mit ZF bezeichnet.

4. KONSTRUKTION DER REELLEN ZAHLEN

Im Vorwort zu seiner Schrift *Stetigkeit und irrationale Zahlen* schreibt Richard Dedekind: *"Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik.* [...] *Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, dass ich den festen Entschluß faßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde.* [...] *Dies gelang mir am 24. November 1858."*

In diesem Kapitel werden wir (in der Mengenlehre) aus den rationalen Zahlen ein Modell der reellen Zahlen konstruieren, und zwar so, wie es auch Dedekind gemacht hat, nämlich mit *Dedekind'schen Schnitten*.

DIE AXIOME DER REELLEN ZAHLEN

Die Signatur des Axiomensystems R der reellen Zahlen ist $\mathscr{L}_{\mathsf{R}} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$, wobei 0 und 1 Konstantensymbole sind, $+$ und $\cdot$ binäre Funktionssymbole sind und $<$ ein binäres Relationssymbol ist.

Die erste Gruppe des Axiomensystems R besteht aus den Körperaxiomen KT:

R_0:	$\forall x \forall y \forall z \big(x + (y + z) = (x + y) + z\big)$	($+$ ist *assoziativ*)
R_1:	$\forall x \forall y (x + y = y + x)$	($+$ ist *kommutativ*)
R_2:	$\forall x (0 + x = x)$	(0 ist *link-neutral* bzgl. $+$)
R_3:	$\forall x \exists y (y + x = 0)$	(*links-Inverse* bzgl. $+$)
R_4:	$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$	($\cdot$ ist *assoziativ*)
R_5:	$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$	($\cdot$ ist *kommutativ*)
R_6:	$\forall x (1 \cdot x = x)$	(1 ist *link-neutral* bzgl. $\cdot$)
R_7:	$\forall x \exists y (x \neq 0 \to y \cdot x = 1)$	(*links-Inverse* bzgl. $\cdot$ für $x \neq 0$)
R_8:	$\forall x \forall y \forall z \big(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big)$	($\cdot$ ist *links-distributiv* über $+$)
R_9:	$0 \neq 1$	

Die zweite Gruppe des Axiomensystems R besteht aus den Axiomen für dichte lineare Ordnungen DLO:

R_{10}:	$\forall x \neg (x < x)$	($<$ ist nicht *reflexiv*)
R_{11}:	$\forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \to x < z\big)$	($<$ ist *transitiv*)
R_{12}:	$\forall x \forall y \big(x < y \vee x = y \vee y < x\big)$	($<$ definiert eine *lineare* Ordnung)
R_{13}:	$\forall x \forall y \exists z \big(x < y \to (x < z \wedge z < y)\big)$	($<$ definiert eine *dichte* Ordnung)
R_{14}:	$\forall x \exists y \exists z \big(y < x \wedge x < z\big)$	(keine grössten bzw. kleinsten Elemente)

Die dritte Gruppe des Axiomensystems R besteht aus zwei Axiomen, welche die Ordnungsstruktur mit den Rechenoperationen verbindet:

R_{15}: $\forall x \forall y \forall z \big(x < y \to x + z < y + z\big)$ (Kompatibilität von $<$ mit $+$)

R_{16}: $\forall x \forall y \big((0 < x \wedge 0 < y) \to 0 < x \cdot y\big)$ (Kompatibilität von $<$ mit $\cdot$)

Um das letzte Axiom, das **Vollständigkeitsaxiom** R_{17}, zu formulieren, müssen wir über Teilmengen von $\mathbb{R}$ sprechen. Insbesondere kann das Axiom R_{17} nur mit Hilfe der Mengenlehre – in der wir ein Modell der reellen Zahlen konstruieren – formuliert werden.

R_{17}: Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ hat ein *Supremum* in $\mathbb{R}$.

Etwas formaler ausgedrückt, mit der Definition $x \leq y :\Longleftrightarrow\ x < y \vee x = y$, heisst das:

$$\forall X \Big(\big(X \subseteq \mathbb{R} \wedge X \neq \emptyset \wedge \exists r\, \forall x \in X\, (x \leq r)\big) \to \exists s\, \big(\forall x \in X (x \leq s) \wedge \forall t\, \big(\forall x \in X (x \leq t) \to s \leq t\big)\big)\Big)$$

DEDEKIND'SCHE SCHNITTE

Wir konstruieren die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, welche ihrerseits aus $\mathbb{N}$ (bzw. ω) und $\mathbb{Z}$ konstruiert wurden. Das heisst wir gehen aus von einem Modell $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, <)$ der rationalen Zahlen, in dem die Axiome $\mathsf{R}_0 - \mathsf{R}_{16}$ gelten. Um weniger Fallunterscheidungen machen zu müssen, schränken wir uns auf die Konstruktion der positiven reellen Zahlen ein – die Konstruktion der negativen reellen Zahlen ist analog. Dafür definieren wir $\mathbb{Q}^+ := \{p \in \mathbb{Q} : p > 0\}$.

Ein **Dedekind'scher Schnitt** ist eine Teilmenge $\alpha \subseteq \mathbb{Q}^+$ mit folgenden Eigenschaften:

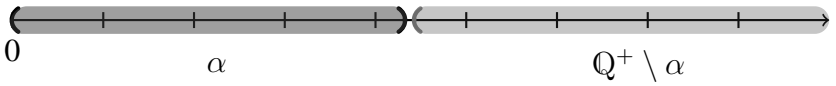
(D0) $\alpha \neq \emptyset$ und $\alpha \neq \mathbb{Q}^+$.

(D1) Falls $p \in \alpha$ und $q \in \mathbb{Q}^+$ mit $q < p$, so folgt $q \in \alpha$ (α ist *nach unten abgeschlossen*).

(D2) Für jedes $p \in \alpha$ existiert ein $q \in \alpha$ mit $p < q$ (α enthält kein *maximales Element*).

Offensichtlich sind Dedekind'sche Schnitte nach oben beschränkt: Falls α ein Dedekind'scher Schnitt ist, so existiert wegen (D0) eine Zahl $p \in \mathbb{Q}^+ \setminus \alpha$. Damit ist aber p eine obere Schranke von α, denn wäre $q \in \alpha$ mit $q > p$, so wäre aufgrund von (D1) auch $p \in \alpha$, ein Widerspruch.

Ein Dedekind'scher Schnitt α teilt die positiven rationalen Zahlen in zwei disjunkte Stücke:



Wir definieren nun die *positiven reellen Zahlen* als Menge aller Dedekind'schen Schnitte:

$$\mathbb{R}^+ := \{\alpha \subseteq \mathbb{Q}^+ : \alpha \text{ ist ein Dedekindscher Schnitt}\}.$$

Die reellen Zahlen sollen aber die rationalen Zahlen erweitern; diese lassen sich jedoch in natürlicher Weise als Dedekind'sche Schnitte darstellen: Für positive rationale Zahlen $p \in \mathbb{Q}^+$ definieren wir

$$\alpha_p := \{q \in \mathbb{Q}^+ : q < p\}.$$

Dann ist α_p ein Dedekind'scher Schnitt. Um dies zu sehen, müssen wir (D0) – (D2) nachprüfen: (D0) ist offensichtlich. Für (D1) sei $q \in \alpha_p$ und $r \in \mathbb{Q}^+$ mit $r < q$. Da $q < p$, folgt auch $r < p$ und somit $r \in \alpha_p$. Für (D2) sei $q \in \alpha_p$. Somit gilt $q < p$ und für $r := \frac{p+q}{2}$ folgt $r \in \mathbb{Q}^+$, $q < r < p$ und $r \in \alpha_p$.

Für positive rationale Zahlen $p \in \mathbb{Q}^+$ identifizieren wir p mit α_p und erhalten so eine *Einbettung* $\mathbb{Q}^+ \hookrightarrow \mathbb{R}^+$ (ähnlich wie wir auch eine Einbettung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ haben). Es gibt nun aber auch Dedekind'sche Schnitte, die eine "Lücke" in den rationalen Zahlen darstellen. Solche Lücken heissen *irrationale* Zahlen. Zum Beispiel stellt der Dedekind'sche Schnitt

$$\alpha := \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\}$$

eine solche Lücke dar. Üblicherweise wird dies implizit mit der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahlen bewiesen, was wir aber erst später zeigen werden. Der folgende indirekte Beweis stammt aus Dedekinds Schrift *Stetigkeit und irrationale Zahlen*: Wir müssen zeigen, dass es keine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ gibt mit $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ existieren mit $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Es gibt also positive Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ welche die Gleichung

$$p^2 - 2q^2 = 0$$

erfüllen, woraus $q < p$ und $p < 2q^2$ folgt. Wir dürfen annehmen, dass q die kleinste Zahl ist, welche die Eigenschaft besitzt, dass ihr Quadrat durch Multiplikation mit 2 eine Quadratzahl ist. Setzen wir $\bar{q} := p - q$ und $\bar{p} := 2q - p$, so folgt aus $q < p$ und $\frac{p}{q} < 2$, dass gilt $q < p < 2q$ und $0 < \bar{q} < q$. Mit der Voraussetzung $p^2 - 2q^2 = 0$ erhalten wir

$$\bar{p}^2 - 2\bar{q}^2 = 4q^2 - 4pq + p^2 - 2(p^2 - 2pq + q^2) = -p^2 + 2q^2 = 0$$

und weil $0 < \bar{q} < q$ ist, widerspricht dies der Minimalität von q.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich Dedekind'sche Schnitte addieren und multiplizieren lassen. Die Antwort auf diese Frage ist sehr einfach: Man betrachtet einfach die Menge, die dadurch entsteht, dass man alle Elemente des einen Schnittes mit allen Elementen des anderen Schnittes addiert bzw. multipliziert.

Für Dedekind'sche Schnitte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ definieren wir:

$$\alpha + \beta := \big\{p + q : p \in \alpha \wedge q \in \beta\big\}$$

$$\alpha \cdot \beta := \big\{p \cdot q : p \in \alpha \wedge q \in \beta\big\}$$

LEMMA 4.1. *Seien α, β Dedekind'sche Schnitte. Dann sind $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ ebenfalls Dedekind'sche Schnitte.*

Beweis. Wir zeigen nur, dass $\alpha + \beta$ ein Dedekind'scher Schnitt ist; der Beweis, dass auch $\alpha \cdot \beta$ ein Dedekind'scher Schnitt ist, ist analog.

(D0) Da $\alpha, \beta \neq \emptyset$, gibt es $p \in \alpha$ und $q \in \beta$. Somit folgt $p + q \in \alpha + \beta$. Da $\alpha, \beta \neq \mathbb{Q}^+$, gibt es $r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \alpha$ und $s \in \mathbb{Q}^+ \setminus \beta$. Für $p \in \alpha$ und $q \in \beta$ ist $p < r$ und $q < s$, also ist $p + q < r + s$, woraus folgt $r + s \notin \alpha + \beta$, d.h. $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}^+$.

(D1) Sei $r \in \alpha + \beta$ und $s \in \mathbb{Q}^+$ mit $s < r$. Es gibt $p \in \alpha, q \in \beta$ mit $r = p + q$. Also gilt $s < p + q$ und somit $s - q < p$. Ist $s \leq p, q$, so folgt aus (D1) für α und β, $s \in \alpha$ und $s \in \beta$. Insbesondere ist dann

$$s = \underbrace{\frac{s}{2}}_{\in\alpha} + \underbrace{\frac{s}{2}}_{\in\beta} \in \alpha + \beta$$

wie gewünscht. Sei nun $s \not\leq p, q$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s > q$. Aus (D1) für α und $s < p + q$ folgt $s - q < p$, also $s - q \in \alpha$. Somit ist

$$s = \underbrace{s - q}_{\in\alpha} + \underbrace{q}_{\in\beta} \in \alpha + \beta.$$

(D2) Sei $r = p + q \in \alpha + \beta$ mit $p \in \alpha$ und $q \in \beta$. Gemäss (D2) für α gibt es ein $p' \in \alpha$ mit $p < p'$. Somit ist $r = p + q < p' + q$ und $p' + q \in \alpha + \beta$.

$\dashv$

In *Stetigkeit und irrationale Zahlen* schreibt Richard Dedekind: *"Ebenso wie die Addition lassen sich auch die übrigen Operationen der sogenannten Elementar-Arithmetik definieren, nämlich die Bildung der Differenzen, Produkte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, und man gelangt auf diese Weise zu wirklichen Beweisen von Sätzen (wie z. B. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$), welche meines Wissens bisher nie bewiesen sind."*

Als Beispiel für die Multiplikation zweier Dedekind'scher Schnitte beweisen wir nun die Gleichung $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, d.h. für $\alpha = \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\}$ und $\beta = \{q \in \mathbb{Q}^+ : q^2 < 3\}$ ist

$$\alpha \cdot \beta = \{r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 < 6\}.$$

Beachte zuerst, dass für rationale Zahlen $\frac{s}{t} \in \alpha$ und $\frac{u}{v} \in \beta$ stets $\frac{s^2}{t^2} \cdot \frac{u^2}{v^2} < 6$ gilt. Sei nun $r \in \mathbb{Q}^+$ mit $r^2 < 6$. Wir müssen rationale Zahlen $\frac{s}{t} \in \alpha$ und $\frac{u}{v} \in \beta$ finden, sodass $r^2 < \frac{s^2}{t^2} \cdot \frac{u^2}{v^2}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $6 - r^2 > \frac{1}{n}$, und sei $m \in \mathbb{N}$, sodass $m > 22n$. Dann ist

$$\tfrac{1}{n} > \tfrac{22}{m} > \tfrac{22-\frac{20}{m}}{m} = \tfrac{22m-20}{m^2} = \tfrac{10m+12m-20}{m^2}$$

und es gilt

$$\left(2 - \tfrac{4}{m}\right) \cdot \left(3 - \tfrac{5}{m}\right) = 6 - \tfrac{10m+12m-20}{m^2} > 6 - \tfrac{1}{n} > r^2.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $\left(\frac{k+1}{m}\right)^2 \geq 2 > \left(\frac{k}{m}\right)^2$, dann gilt

$$2 - \tfrac{k^2}{m^2} \leq \left(\tfrac{k+1}{m}\right)^2 - \left(\tfrac{k}{m}\right)^2 = \tfrac{2k+1}{m^2}$$

und weil $k < \frac{3m}{2}$ (denn $\frac{9}{4} > 2$), erhalten wir

$$2 - \tfrac{k^2}{m^2} < \tfrac{3m+1}{m^2} = \tfrac{m\left(3+\frac{1}{m}\right)}{m^2} < \tfrac{4}{m}.$$

Analog sei $l \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $\left(\frac{l+1}{m}\right)^2 \geq 3 > \left(\frac{l}{m}\right)^2$, dann gilt wieder $3 - \frac{l^2}{m^2} \leq \frac{2l+1}{m^2}$ und weil $l < 2m$ (denn $4 > 3$), erhalten wir

$$3 - \tfrac{l^2}{m^2} < \tfrac{4m+1}{m^2} = \tfrac{m\left(4+\frac{1}{m}\right)}{m^2} < \tfrac{5}{m}.$$

Schliesslich sei $p := 2 - \frac{4}{m}$ und $q := 3 - \frac{5}{m}$. Dann ist

$$0 < p < \tfrac{k^2}{m^2} < 2 \quad \text{und} \quad 0 < q < \tfrac{l^2}{m^2} < 3.$$

Insbesondere ist $\frac{k}{m} \in \alpha$ und $\frac{l}{m} \in \beta$, und mit obiger Ungleichung gilt

$$r^2 < 6 - \tfrac{1}{n} < p \cdot q < \tfrac{l^2}{m^2} \cdot \tfrac{k^2}{m^2} < 6$$

womit $\frac{k}{m}$ und $\frac{l}{m}$ die gesuchten Zahlen sind.

Wir können analog die Konstruktion auch auf die negativen Zahlen ausweiten. Damit lässt sich leicht zeigen, dass die so konstruierten reellen Zahlen wie gewünscht die Körperaxiome erfüllen. Etwas formaler ausgedrückt haben wir das Modell $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot)$ der rationalen Zahlen zu einem Modell $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$ erweitert. Was noch fehlt, ist die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen und wir müssen auch zeigen, dass das Axiom R_{17} erfüllt ist.

Für Dedekind'sche Schnitte α und β definieren wir:

$$\alpha < \beta :\Longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta.$$

Weil $\mathbb{Q} \models \mathsf{DLO}$ folgt aus der Definition der Dedekind'schen Schnitte leicht, dass $<$ eine (strikte) lineare Ordnungsrelation ist, und weil $\mathbb{Q} \models \mathsf{DLO} + \mathsf{R}_{15} + \mathsf{R}_{16}$ gilt, folgt (wieder aus

der Definition der Dedekind'schen Schnitte), dass die Axiome $\mathsf{DLO} + \mathsf{R}_{15} + \mathsf{R}_{16}$ auch in $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ erfüllt sind. Es bleibt also nur noch $\mathbb{R} \models \mathsf{R}_{17}$ zu zeigen. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass in $\mathbb{R}$ jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt:

THEOREM 4.2. *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig, d.h. jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.*

Beweis. Wir beschränken uns auch hier der Einfachheit halber auf die positiven reellen Zahlen. Sei $X \neq \emptyset$ eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^+$, d.h. die Elemente $\alpha \in X$ sind Dedekind'sche Schnitte der Form $\alpha \subseteq \mathbb{Q}^+$. Wir setzen

$$\beta := \bigcup_{\alpha \in X} \alpha = \big\{p \in \mathbb{Q}^+ : \exists \alpha \in X \ (p \in \alpha)\big\}.$$

Wir zeigen zuerst, dass β ein Dedekind'scher Schnitt ist.

(D0) Offensichtlich gilt $\beta \neq \emptyset$, da $X \neq \emptyset$. Wir zeigen noch, dass $\beta \neq \mathbb{Q}^+$. Da X nach oben beschränkt ist, gibt es eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}^+$ mit $p < q$ für alle $p \in \beta$. Somit ist $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \beta$.

(D1) Sei $p \in \beta$ und $q \in \mathbb{Q}^+$ mit $q < p$. Dann gibt es ein $\alpha \in X$ mit $p \in \alpha$, und da α (D1) erfüllt, folgt $q \in \alpha \subseteq \beta$.

(D2) Sei $p \in \beta$. Dann gibt es ein $\alpha \in X$ mit $p \in \alpha$. Da α kein maximales Element besitzt, gibt es ein $q \in \alpha$ mit $p < q$. Da $\alpha \subseteq \beta$, folgt $q \in \beta$.

Somit ist also $\beta \in \mathbb{R}^+$. Da nun $\alpha \subseteq \beta$ (d.h. $\alpha \leq \beta$) für alle $\alpha \in X$, ist β eine obere Schranke von X. Es bleibt noch zu zeigen, dass β die kleinste obere Schranke von X ist. Sei $\gamma \in \mathbb{R}^+$ beliebig mit $\gamma < \beta$. Dann gibt es ein $p \in \beta \setminus \gamma$, und nach Definition von β existiert ein $\alpha \in X$ mit $p \in \alpha$. Daraus folgt $\gamma < \alpha$, und weil $\alpha \in X$, kann γ keine obere Schranke von X sein. Also ist β die kleinste obere Schranke von X. ⊣

Es stellt sich die Frage, ob es auch andere Modelle der reellen Zahlen gibt, oder ob zumindest alle Modelle der reellen Zahlen isomorph zueinander sind. Obwohl dies manchmal sogar "bewiesen" wird, ist die Aussage nicht ganz richtig. Genau genommen haben wir nämlich das Modell $\mathbb{R}$ in einem Modell von ZF konstruiert, d.h. die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht "absolut" sondern hängt vom zugrunde gelegten Modell von ZF ab, in dem $\mathbb{R}$ konstruiert wurde. Insbesondere hängt die Grösse der Menge $\mathbb{R}$ davon ab, wie gross die Menge $\mathscr{P}(\omega)$ im zugrunde gelegten Modell von ZF ist, was aber von ZF unabhängig ist, d.h. von ZF nicht entschieden wird.

INTERVALLSCHACHTELUNGEN

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen ist von fundamentaler Bedeutung für die Grundlagen der Analysis. Zum Beispiel lassen sich damit der Satz von Bolzano-Weierstraß oder der Zwischenwertsatz beweisen.

Eine wichtige Folgerung aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen ist der folgende Satz, für den wir zuerst den Begriff der *Intervallschachtelung* definieren: Eine **Intervallschachtelung** ist eine Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von nicht-leeren abgeschlossenen Intervallen $I_n = [x_n, y_n]$ mit der Eigenschaft

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$$

und $\lim\limits_{n \to \infty} (y_n - x_n) = 0$.

THEOREM 4.3. *Sei $((I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung mit $I_n = [x_n, y_n]$. Dann gibt es genau eine reelle Zahl x mit $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$.*

Beweis. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gibt es Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad y = \inf\{y_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Somit gilt

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x \leq y \leq \cdots \leq y_2 \leq y_1 \leq y_0$$

und somit $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Es bleibt zu zeigen, dass $x = y$. Wäre $x < y$, so wäre $\varepsilon := y - x > 0$. Nach Annahme gibt es aber ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $y_n - x_n < \varepsilon$ und damit $y - x \leq y_n - x_n < \varepsilon$, was aber ein Widerspruch ist zur Definition von x und y. ⊣

Es sei erwähnt, dass sich mit Hilfe von Theorem 4.3 die reellen Zahlen auch als Äquivalenzklassen von *Cauchy-Folgen* konstruieren lassen.

5. DAS AUSWAHLAXIOM

1904 (und dann nochmals 1907) hat Ernst Zermelo bewiesen, dass sich jede Menge *wohlordnen* lässt. (Zur Erinnerung: Eine Wohlordnung auf einer Menge A ist eine lineare Ordnung $<$ bei der jede nicht-leere Menge $S \subseteq A$ bezüglich $<$ ein minimales Element hat.) Für die Beweise benutzte Zermelo beide Male ein nicht-konstruktives Prinzip, das sogenannte *Auswahlaxiom*.

9. Auswahlaxiom.

$$\forall \mathscr{F}\Big(\emptyset \notin \mathscr{F} \to \exists f\Big(f \in {}^{\mathscr{F}}\bigcup \mathscr{F} \wedge \forall x \in \mathscr{F}\big(f(x) \in x\big)\Big)\Big)$$

Das *Auswahlaxiom* besagt, das es für jede Familie $\mathscr{F}$ von nicht-leeren Mengen eine Funktion f gibt, die aus jeder Menge $x \in \mathscr{F}$ ein Element $f(x)$ auswählt. Etwas informeller heisst dies, dass jede Familie nicht-leerer Mengen eine Auswahlfunktion besitzt, oder noch etwas kürzer, cartesische Produkte nicht-leerer Mengen sind nicht leer.

Die Axiome ZF zusammen mit dem Auswahlaxiom AC (für *Axiom of Choice*) ist das Axiomensystem der **Mengenlehre** und wird mit ZFC bezeichnet.

In der Mathematik wird anstelle des Auswahlaxioms meist eine äquivalente Formulierung benutzt, wie zum Beispiel das *Kuratowski-Zorn Lemma* – manchmal auch bloss *Lemma von Zorn* genannt, obwohl Kuratowski dieses Lemma mehr als 10 Jahre vor Zorn bewiesen und publiziert hat. Bevor wir einige, zum Auswahlaxiom äquivalente, Auswahlprinzipien formulieren (und deren Äquivalenz zu AC beweisen), führen wir den Begriff der *Ordinalzahl* ein, welcher eng mit dem Auswahlaxiom zusammenhängt und in der Mengenlehre eine fundamentale Rolle spielt.

ORDINALZAHLEN

Eine Menge x ist **transitiv** falls $\forall y \in x\,(y \subseteq x)$, d.h. jedes Element von x ist auch Teilmenge von x. Eine Menge α ist eine **Ordinalzahl**, wenn α transitiv ist und durch die Relation $\in$ wohlgeordnet wird. Ist α eine Ordinalzahl, so ist auch

$$\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$$

eine Ordinalzahl, denn mit α ist auch $\alpha + 1$ transitiv und wohlgeordnet durch $\in$. Weiter hat jede nicht-leere Teilmenge $u \subseteq \alpha$ ein $\in$-minimales Element, d.h.

$$\forall u \subseteq \alpha\big(u \neq \emptyset \to \exists x \in u \forall z \in \alpha\,\big(z \in x \to z \notin u\big)\big).$$

Die Kollektion aller Ordinalzahlen bezeichnen wir mit Ω, d.h. $\alpha \in \Omega$ ist nur eine abgekürzte Schreibweise für α *ist eine Ordinalzahl*. Aus dem folgenden Theorem, das wir nicht beweisen, folgt, dass Ω keine Menge ist – Ω ist eine sogenannte *Klasse* (d.h. eine Kollektion von Mengen).

THEOREM 5.1.

(a) *Ist $\alpha \in \Omega$, dann ist $\alpha = \emptyset$ oder $\emptyset \in \alpha$.*

(b) *Sind $\alpha, \beta \in \Omega$, dann gilt entweder $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\alpha \ni \beta$.*

(c) *Ist $\alpha \in \beta \in \Omega$, so ist $\alpha \in \Omega$.*

(d) *Ist $S \subseteq \Omega$ eine Menge, dann gilt $\bigcap S \in \Omega$ und $\bigcup S \in \Omega$.*

(e) *Ist $S \subseteq \Omega$ eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen, so hat S ein $\in$-minimales Element.*

Aus Theorem 5.1 folgt, dass Ω durch $\in$ wohlgeordnet wird. Wäre also Ω eine Menge (also ein Objekt in einem Modell von ZF oder von ZFC), so wäre Ω selbst eine Ordinalzahl, also $\Omega \in \Omega$, was aber dem Fundierungsaxiom widerspricht.

Als Folgerung aus Theorem 5.1 erhalten wir

KOROLLAR 5.2.

(a) *Sind $\alpha, \beta \in \Omega$ und $\alpha \in \beta$, dann ist $\alpha + 1 \subseteq \beta$. Insbesondere ist $\alpha + 1$ die kleinste Ordinalzahl, welche α enthält.*

(b) *Für jede Ordinalzahl $\alpha \in \Omega$ haben wir entweder*

$$\alpha = \bigcup \alpha, \quad \text{in diesem Fall heisst } \alpha \textbf{ Limesordinalzahl},$$

oder

$$\exists \beta \in \Omega\, (\alpha = \beta + 1), \quad \text{in diesem Fall heisst } \alpha \textbf{ Nachfolgerordinalzahl}.$$

Beispiele.

- Die Elemente aus ω sowie ω selbst sind Ordinalzahlen.
- $\emptyset$ und ω sind Limesordinalzahlen, und alle Elemente $n \in \omega \setminus \{\emptyset\}$ sind Nachfolgerordinalzahlen.
- Weitere (abzählbare) Ordinalzahlen sind zum Beispiel

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \omega, \ldots, \omega \cdot \omega, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots, \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot}}}, \ldots$$

- Die kleinste überabzählbare Ordinalzahl wird mit ω_1 bezeichnet.

Mit dem Ersetzungsaxiom und dem Fundierungsaxiom lässt sich zeigen, dass jedes Modell $\mathbf{V}$ von ZF (oder ZFC) von folgender Struktur ist.

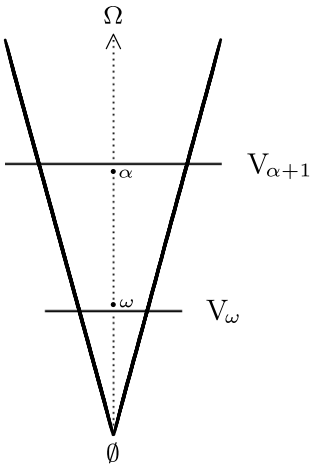
Zuerst definieren wir

$$\begin{array}{lcll} \mathrm{V}_0 & := & \emptyset & \\ \mathrm{V}_\alpha & := & \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathrm{V}_\beta & \text{für Limesordinalzahlen } \alpha \neq 0 \\ \mathrm{V}_{\alpha+1} & := & \mathscr{P}(\mathrm{V}_\alpha) & \text{für Nachfolgerordinalzahlen } \alpha + 1 \end{array}$$

und schliesslich definieren wir die Klasse $\mathbf{V}$ durch

$$\mathbf{V} := \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathrm{V}_\alpha,$$

d.h. für jede Menge $x \in \mathbf{V}$ exisitert eine Ordinalzahl α, sodass x ein Element der Menge V_α ist.



Die **kumulative Hierarchie** $\mathbf{V}$ ist die Klasse *aller* Mengen und ist ein Modell von ZF bzw. von ZFC. Insbesondere ist also jede Menge entweder die leere Menge oder sie ist eine Teilmenge einer α-fach iterierten Potenzmenge der leeren Menge für ein $\alpha \in \Omega$.

ÄQUIVALENTE FORMULIERUNGEN DES AUSWAHLAXIOMS

Eine auf den ersten Blick andere Aussage als das Auswahlaxiom ist das folgende

Wohlordnungsprinzip WOP. Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

Wir zeigen nun, dass das Auswahlaxiom und das Wohlordnungsprinzip äquivalent sind.

THEOREM 5.3. AC $\iff$ WOP

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei M eine Menge. Ist $M = \emptyset$, dann ist M bereits wohlgeordnet und wir sind fertig. Wir nehmen nun $M \neq \emptyset$ an und definieren $\mathscr{P}^*(M) := \mathscr{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$. Weiter sei, mit Annahme von AC, $f : \mathscr{P}^*(M) \to M$ eine beliebige aber feste Auswahlfunktion für $\mathscr{P}^*(M)$.

Eine injektive Funktion $w_\alpha : \alpha \hookrightarrow M$, wobei $\alpha \in \Omega$ eine Ordinalzahl ist, ist eine ***f*-Menge**, falls für alle $\gamma \in \alpha$ gilt:

$$w_\alpha(\gamma) = f\big(M \setminus \{w_\alpha(\delta) : \delta \in \gamma\}\big)$$

Zum Beispiel ist $w_1(0) = f(M)$ eine f-Menge – sogar die einzige f-Menge mit *Definitionsbereich* $\mathrm{dom}(w_1) = 1$. Für f-Mengen w_α und w_β definieren wir

$$w_\alpha \prec w_\beta :\iff \alpha \in \beta \wedge w_\beta|_\alpha = w_\alpha \qquad \text{wobei} \quad w_\beta|_\alpha := \big\{\langle \gamma, x\rangle \in w_\beta : \gamma \in \alpha\big\}.$$

BEHAUPTUNG: *Sind w_α und w_β f-Mengen, dann gilt $\alpha \in \beta \Rightarrow w_\alpha \prec w_\beta$.*

Beweis der Behauptung. Sei $\Gamma = \big\{\gamma \in \alpha : w_\beta|_\alpha(\gamma) \neq w_\alpha(\gamma)\big\} \subseteq \alpha$. Für einen Widerspruch nehmen wir $\Gamma \neq \emptyset$ an. Sei $\gamma_0 \in \alpha$ das $\in$-minimale Element von Γ. Es gilt dann $w_\beta|_\alpha(\gamma_0) \neq w_\alpha(\gamma_0)$ und für alle $\delta \in \gamma_0$ ist $w_\beta|_\alpha(\delta) = w_\alpha(\delta)$, d.h. $w_\beta|_{\gamma_0} = w_\alpha|_{\gamma_0}$.

Nun ist aber

$$w_\beta|_\alpha(\gamma_0) = f\big(M \setminus \{w_\beta|_\alpha(\delta) : \delta \in \gamma_0\}\big) = f\big(M \setminus \{w_\alpha(\delta) : \delta \in \gamma_0\}\big) = w_\alpha(\gamma_0)$$

d.h. $w_\beta|_\alpha(\gamma_0) = w_\alpha(\gamma_0)$, und unsere Annahme $\Gamma \neq \emptyset$ ist widerlegt. $\dashv_{\text{Beh.}}$

Weil die Funktionen $w_\alpha : \alpha \hookrightarrow M$ injektiv sind, folgt aus der Behauptung und dem Ersetzungsaxiom, dass

$$\Theta := \big\{\beta \in \Omega : \exists \alpha \in \Omega\, \exists x \in M\, \big(w_\alpha(\beta) = x\big)\big\}$$

eine Menge ist. Mit Theorem 5.1.(e) ist dann $\lambda := \bigcup \Theta \in \Omega$ (d.h. λ ist eine Ordinalzahl), und

$$\begin{array}{rccc} w_\lambda : & \lambda & \hookrightarrow & M \\ & \beta & \mapsto & w_{\beta+1}(\beta) \end{array}$$

ist eine f-Menge. Wäre w_λ nicht surjektiv, so könnten wir w_λ erweitern zur f-Menge

$$w_{\lambda+1} := w_\lambda \cup \Big\{\big\langle \lambda,\ f\big(M \setminus \{w_\lambda(\delta) : \delta \in \lambda\}\big)\big\rangle\Big\}$$

und hätten $\lambda \in \Theta$, also $\lambda \in \lambda$, was aber Thm. 5.1.(a) widerspricht. Die Funktion $w_\lambda : \lambda \to M$ ist somit injektiv und surjektiv, also bijektiv, und die Menge M wird durch w_λ wohlgeordnet.

($\Leftarrow$) Sei $\mathscr{F}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen und sei $<$ eine Wohlordnung auf $\bigcup \mathscr{F}$. Definiere $f : \mathscr{F} \to \bigcup \mathscr{F}$ durch "$f(x)$ ist das $<$-minimale Element von x". Dann ist f eine Auswahlfunktion von $\mathscr{F}$. $\dashv$

Der Beweis von Theorem 5.3 gibt uns etwas mehr als nur eine Wohlordnung auf M, nämlich eine *Bijektion* zwischen einer Ordinalzahl α und der Menge M. Mit dieser Bijektion (und den Eigenschaften von Ordinalzahlen) können wir viele Beweise, in denen das Auswahlaxiom verwendet wird, dadurch vereinfachen, dass wir eine Art "Induktion" ausführen:

Transfinite Induktion. Sei M eine Menge, $\lambda \in \Omega$ eine Ordinalzahl und $\iota : \lambda \to M$ eine Bijektion. Mit Hilfe von ι können wir M schreiben als $M = \{a_\beta : \beta \in \lambda\}$.

Sei $f : \lambda \times \mathscr{P}(M) \to M$ eine Funktion. Mit Induktion über λ definieren wir nun für alle $\beta \in \lambda$ die Mengen $A_\beta \subseteq M$ wie folgt:

$$A_\beta := \begin{cases} \emptyset & \text{für } \beta = 0, \\ A_\delta \cup \{f(\delta, A_\delta)\} & \text{für } \beta = \delta + 1, \\ \bigcup_{\delta\in\beta} A_\delta & \text{für Limesordinalzahlen } \beta \neq 0. \end{cases}$$

Dann ist $A_\lambda := \bigcup_{\beta\in\lambda} A_\beta \subseteq M$.

Beispiel: Jeder Vektorraum V hat eine Basis.

Sei $V = \{v_\beta : \beta \in \lambda\}$ für ein $\lambda \in \Omega$. Für $\delta \in \lambda$ und $A_\delta \subseteq V$ (mit $A_0 := \emptyset$) definieren wir

$$f(\delta, A_\delta) := \begin{cases} A_\delta & \text{falls die Vektoren } A_\delta \cup \{v_\delta\} \text{ linear abhängig sind,} \\ A_\delta \cup \{v_\delta\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist die entsprechende Menge $A_\lambda \subseteq V$ eine Basis von V: Wären die Vektoren aus A_λ linear abhängig, so gäbe es eine kleinste Ordinalzahl $\delta \in \lambda$, sodass A_δ linear unabhängig und $A_\delta \cup \{v_\delta\}$ linear abhängig ist, das widerspricht aber der Definition von $f(\delta, A_\delta)$. Wären umgekehrt die Vektoren aus A_λ kein Erzeugendensystem, so gäbe es eine kleinste Ordinalzahl $\delta \in \lambda$, sodass $v_\delta \notin A_\lambda$ und $A_\lambda \cup \{v_\delta\}$ linear unabhängig ist. Insbesondere ist dann auch $A_\delta \cup \{v_\delta\}$ linear unabhängig, und nach Definition von $f(\delta, A_\delta)$ ist dann aber $v_\delta \in A_{\delta+1} \subseteq A_\lambda$

Bevor wir ein weiteres zu AC äquivalentes Auswahlprinzip formulieren, führen wir zuerst die Begriffe *Partialordnung* und *Kette* ein: Eine Menge P zusammen mit einer binäre Relation $\leq$ ist eine **Partialordnung**, falls die Relation $\leq$ reflexiv ($x \leq x$), anti-symmetrisch (aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$), und transitiv (aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$) ist. Eine Teilmenge $C \subseteq P$ einer Partialordnung $(P, \leq)$ ist eine **Kette**, falls C durch $\leq$ linear geordnet wird.

Kuratowski-Zorn Lemma KZL. Ist $(P, \leq)$ eine nicht-leere Partialordnung, sodass jede Kette $C \subseteq P$ eine obere Schranke hat, so hat P ein maximales Element.

Für das nächste zu AC äquivalente Auswahlprinzip brauchen wir den Begriff *endlichen Charakter*: Eine Familie $\mathscr{F}$ von Mengen hat **endlichen Charakter**, falls für jede Menge $x \in \mathscr{F}$ gilt, x ist in $\mathscr{F}$ genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von x in $\mathscr{F}$ ist.

Teichmüller-Prinzip TP. Ist $\mathscr{F}$ eine nicht-leere Familie von Mengen mit endlichem Charakter, so hat $\mathscr{F}$ ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element.

THEOREM 5.4. *Die folgenden Prinzipien sind äquivalent zum Auswahlaxiom* AC.

(a) *Wohlordnungsprinzip* WOP
(b) *Kuratowski-Zorn Lemma* KZL
(c) *Teichmüller-Prinzip* TP

Beweis. Wir wissen bereits, dass gilt AC $\Leftrightarrow$ WOP.

WOP $\Rightarrow$ KZL: Der Beweis erfolgt mittels transfiniter Induktion. Sei $(P, \leq)$ eine nicht-leere Partialordnung und sei $P = \{p_\beta : \beta \in \lambda\}$ für eine Ordinalzahl $\lambda \in \Omega$. Für $\delta \in \lambda$ und $A_\delta \subseteq P$ (mit $A_0 := \emptyset$) definieren wir

$$f(\delta, A_\delta) := \begin{cases} A_\delta & \text{falls } A_\delta \text{ keine Kette ist,} \\ A_\delta & \text{falls } p_\delta \text{ keine obere Schranke der Kette } A_\delta \text{ ist,} \\ A_\delta \cup \{p_\delta\} & \text{falls } p_\delta \text{ eine obere Schranke der Kette } A_\delta \text{ ist.} \end{cases}$$

Dann ist die entsprechende Menge $A_\lambda \subseteq P$ eine Kette in P und jede obere Schranke von A_λ ist ein maximales Element von P.

KZL $\Rightarrow$ TP: Sei $\mathscr{F}$ eine nicht-leere Familie von Mengen mit endlichem Charakter. Dann ist $(\mathscr{F}, \subseteq)$ eine nicht-leere Partialordnung und jede Kette $C \subseteq P$ hat eine obere Schranke $\bigcup C$. Weil $\mathscr{F}$ endlichen Charakter hat, gehört, für Ketten C, jede endliche Teilmenge von $\bigcup C$ zu $\mathscr{F}$, und deshalb $\bigcup C \in \mathscr{F}$. Mit KZL hat somit $\mathscr{F}$ ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element.

TP $\Rightarrow$ AC: Sei $\mathscr{F}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen. Wir müssen eine Auswahlfunktion für $\mathscr{F}$ finden. Dazu bilden wir die Menge

$$\mathscr{E} = \left\{ f \in {}^{\mathscr{G}}\bigcup \mathscr{G} : f \text{ ist eine Auswahlfunktion für eine Teilfamilie } \mathscr{G} \subseteq \mathscr{F} \right\}.$$

Eine Funktion $f : \mathscr{G} \to \bigcup \mathscr{G}$ ist eine Auswahlfunktion für $\mathscr{G}$ genau dann, wenn jede endliche Teilfunktion von f (d.h. $f|_{\mathscr{G}'}$ für endliche Teilmengen $\mathscr{G}' \subseteq \mathscr{G}$), eine Auswahlfunktion ist. Die Familie $\mathscr{E}$ hat somit endlichen Charakter und mit TP hat $\mathscr{E}$ ein maximales Element f_0. Weil f_0 maximal ist, muss gelten $\mathrm{dom}(f_0) = \mathscr{F}$ und somit ist f_0 eine Auswahlfunktion für $\mathscr{F}$. ⊣

Abgeschwächte Formen des Auswahlaxioms[†]

Vielfach wird in Beweisen nicht das volle Auswahlaxiom gebraucht, sondern nur eine abgeschwächte Form davon. Ein paar solcher abgeschwächten Formen des Auswahlaxioms seien hier aufgelistet.

- C(ω, ∞): Jede abzählbare Familie nicht-leerer Mengen hat eine Auswahlfunktion.
- C(ω, ω): Jede abzählbare Familie nicht-leerer abzählbarer Mengen hat eine Auswahlfunktion.
- C$(\omega, < \omega)$: Jede abzählbare Familie nicht-leerer endlicher Mengen hat eine Auswahlfunktion.
- C(ω, n): Jede abzählbare Familie n-elementiger Mengen (für $n \in \omega$, $n \geq 1$) hat eine Auswahlfunktion.
- C(∞, n): Jede Familie n-elementiger Mengen (für $n \in \omega$, $n \geq 1$) hat eine Auswahlfunktion.
- C$(\infty, < \omega)$: Jede Familie nicht-leerer endlicher Mengen hat eine Auswahlfunktion.

In dieser Notation ist C(∞, ∞) das volle Auswahlaxiom. In ZF lässt sich zum Beispiel die Implikation C$(\infty, 2) \Rightarrow$ C(∞, n) für $n \in \{1, 2, 4\}$ beweisen, oder auch C$(\infty, < \omega) \Rightarrow$ C(∞, n) für alle $n \in \omega$ mit $n \geq 1$. Andererseits lassen sich in ZF zum Beispiel die Implikationen $\big($C(∞, n) für alle $n \in \omega \setminus \{0\}\big) \Rightarrow$ C$(\infty, < \omega)$ oder C$(\infty, 2) \Rightarrow$ C$(\infty, 3)$ nicht zeigen.

[†] gehört nicht zum Vorlesungsstoff

6. KARDINALZAHLEN

VERGLEICHE VON MÄCHTIGKEITEN IN ZF

Zwei Mengen A und B haben dieselbe **Mächtigkeit**, bezeichnet mit $|A| = |B|$, falls es eine Bijektion zwischen A und B gibt. Zum Beispiel haben $\omega + \omega$ und ω dieselbe Mächtigkeit, denn die Funktion $f : \omega + \omega \to \omega$ definiert durch

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta + \beta & \text{für } \alpha = \omega + \beta, \\ \alpha + \alpha + 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist eine Bijektion zwischen $\omega + \omega$ und ω. Weil die Verknüpfung von Bijektionen wieder eine Bijektion ist, ist die Gleichheit von Mächtigkeiten eine Äquivalenzrelation.

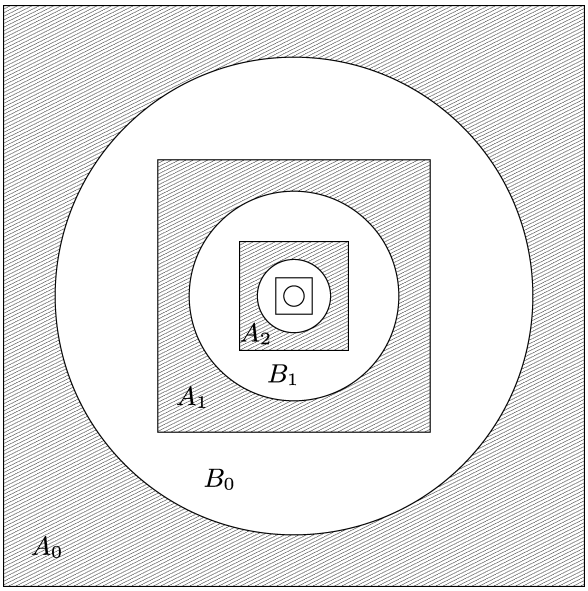
Gilt $|A| = |B'|$ für $B' \subseteq B$, dann ist die Mächtigkeit von A kleiner oder gleich der Mächtigkeit von B, bezeichnet mit $|A| \leq |B|$. Beachte, dass $|A| \leq |B|$ genau dann gilt, wenn es eine Injektion von A in B gibt. Falls $|A| \leq |B|$ und $|A| \neq |B|$ gilt, dann ist die Mächtigkeit von A strikt kleiner als die Mächtigkeit von B, bezeichnet mit $|A| < |B|$. Beachte, dass die Relation $\leq$ reflexiv und transitiv ist. Der folgende Satz sagt nun, dass die Relation $\leq$ auch anti-symmetrisch ist.

CANTOR-BERNSTEIN THEOREM. *Sind A und B zwei Mengen mit $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$, dann gilt $|A| = |B|$.*

Beweis. Seien A und B zwei Mengen und seien $f : A \hookrightarrow B$ und $g : B \hookrightarrow A$ zwei Injektionen. Weiter sei $A_0 := A$, $B_0 := g[B]$ und für $n \in \omega$ sei

$$A_{n+1} := (g \circ f)[A_n], \quad B_{n+1} := (g \circ f)[B_n] \quad \text{und} \quad D := \bigcap_{n \in \omega} A_n.$$

Die folgende Graphik soll diese Definitionen veranschaulichen:



Weil f und g injektiv sind, sind auch $g \circ f$ und $f \circ g$ injektiv. Damit gilt für alle $n \in \omega$, dass $g \circ f$ eine Bijektion zwischen A_n und A_{n+1} ist, und dass $f \circ g$ eine Bijektion zwischen B_n und B_{n+1} ist. Weiter folgt aus $(g \circ f)[A_n] \subseteq B_n \subseteq A_n$ (für alle $n \in \omega$) die Gleichheit $D = \bigcap_{n \in \omega} B_n$.

Aus den obigen Beobachtungen folgt, dass die Mengen A_n und B_n die folgenden Eigenschaften haben:

(a) $A_0 = D \cup (A_0 \setminus B_0) \cup (B_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_2) \cup \ldots$

(b) $B_0 = D \cup (B_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus B_2) \cup \ldots$

(c) Für alle $n \in \omega$ gilt, $|A_n \setminus B_n| = |A_{n+1} \setminus B_{n+1}|$.

Zum Beispiel folgt (c) mit den Bijektionen zwischen A_n und A_{n+1}, bzw. B_n und B_{n+1}. Weil nun für alle $n \in \omega$, die Mengen $(A_n \setminus B_n)$, $(B_n \setminus A_{n+1})$ und D paarweise disjunkt sind, können wir in der Darstellung von B_0 mit der Eigenschaft (c) die Mengen $A_{n+1} \setminus B_{n+1}$ bijektiv auf die Mengen $A_n \setminus B_n$ abbilden. Dadurch erhalten wir die Darstellung von A_0 in (a) und somit ist $|A_0| = |B_0|$. ⊣

Als eine erste Anwendung des CANTOR-BERNSTEIN THEOREMs zeigen wir, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dieselbe Mächtigkeit hat wie ω.

PROPOSITION 6.1. $|\mathbb{Q}| = |\omega|$

Beweis. $|\mathbb{Q}| \leq |\omega|$: Wir definieren $f : \mathbb{Q} \to \omega$ durch

$$f\left(\frac{p}{q}\right) := \begin{cases} 0 & \text{für } p = 0, \\ 2^p \cdot 3^q & \text{für } p, q > 0 \text{ und } \mathrm{ggT}(p, q) = 1, \\ 2^p \cdot 5^{|q|} & \text{für } p > 0,\ q < 0 \text{ und } \mathrm{ggT}(p, q) = 1, \end{cases}$$

dann ist f injektiv (wobei wir hier implizit die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung annehmen, welche wir später beweisen).

$|\omega| \leq |\mathbb{Q}|$: Offensichtlich ist die identische Abbildung $\omega \to \mathbb{Q}$ eine Injektion.

Mit dem CANTOR-BERNSTEIN THEOREM erhalten wir somit $|\mathbb{Q}| = |\omega|$. ⊣

Als eine weitere Anwendung des CANTOR-BERNSTEIN THEOREMs zeigen wir, dass die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dieselbe Mächtigkeit hat wie $\mathscr{P}(\omega)$.

PROPOSITION 6.2. $|\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\omega)|$

Beweis. $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{P}(\omega)|$: Mit Proposition 6.1 haben wir $|\mathbb{Q}| = |\omega|$ und mit der Konstruktion der reellen Zahlen als Dedekind'sche Schnitte erhalten wir $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{P}(\mathbb{Q})|$, also gilt $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{P}(\omega)|$.

$|\mathscr{P}(\omega)| \leq |\mathbb{R}|$: Wir definieren $f : \mathscr{P}(\omega) \to \mathbb{R}$ durch $f(\emptyset) := 0$ und für $x \subseteq \omega$, $x \neq \emptyset$ sei

$$f(x) := \sum_{n \in x} \frac{1}{3^n}.$$

Dann ist – unter Verwendung der eindeutigen Darstellung der aus den Ziffern 0 und 1 gebildeten triadischen Zahlen – f injektiv und es gilt $|\mathscr{P}(\omega)| \leq |\mathbb{R}|$.

Mit dem CANTOR-BERNSTEIN THEOREM erhalten wir somit $|\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\omega)|$. ⊣

Eine wichtige Erkenntnis von Georg Cantor, dem Begründer der Mengenlehre, war, dass es beliebig grosse Mächtigkeiten gibt.

SATZ VON CANTOR. *Für jede Menge M ist $|M| < |\mathscr{P}(M)|$.*

Beweis. Ist $M = \emptyset$, so ist $\mathscr{P}(M) = \{\emptyset\}$ und wir erhalten $|M| < |\mathscr{P}(M)|$. Sei also $M \neq \emptyset$. Dann ist

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \longrightarrow & \mathscr{P}(M) \\ & x & \longmapsto & \{x\} \end{array}$$

eine Injektion und es gilt $|M| \leq |\mathscr{P}(M)|$. Um $|M| \neq |\mathscr{P}(M)|$ zu zeigen sei $g : M \to \mathscr{P}(M)$ irgend eine Funktion. Dann ist

$$\Gamma := \big\{x \in M : x \notin g(x)\big\}$$

eine Teilmenge von M, also $\Gamma \in \mathscr{P}(M)$. Wäre g eine Bijektion, dann wäre g auch eine Surjektion, d.h. es existiert ein $x_0 \in M$ mit $g(x_0) = \Gamma$. Nun gilt aber

$$x_0 \in \Gamma \iff x_0 \notin g(x_0) \iff x_0 \notin \Gamma$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist. Somit ist g nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv, und weil g beliebig war, gilt $|M| \neq |\mathscr{P}(M)|$. ⊣

KARDINALZAHLEN IN ZFC

Mit dem Wohlordnungsprinzip (bzw. dem Auswahlaxiom) kann jede Menge wohlgeordnet werden. Es gilt sogar, dass jede Menge bijektiv auf eine Ordinalzahl abgebildet werden kann. Insbesondere gibt es zu jeder Menge M eine Ordinalzahl $\alpha \in \Omega$ mit $|M| = |\alpha|$. Die **Kardinalität** einer Menge M, bezeichnet mit $|M|$, ist definiert als die kleinste Ordinalzahl α_0, sodass eine Bijektion zwischen α_0 und M existiert, d.h. $|\alpha_0| = |M|$. Formal lässt sich die Ordinalzahl $|M|$ wie folgt definieren:

$$|M| := \bigcap \big\{\alpha \in \Omega : \exists f \in {}^{\alpha}M \,(f \text{ ist bijektiv})\big\}$$

wobei noch zu beweisen wäre, dass $\big\{\alpha \in \Omega : |\alpha| = |M|\big\}$ eine Menge ist. Nach Definition ist $|M|$ also immer eine Ordinalzahl.

Ist $\alpha = |M|$ für eine Menge M, so ist α eine **Kardinalzahl**. Für Kardinalzahlen κ gilt also $\kappa = |\kappa|$. Zum Beispiel sind die Elemente aus ω, wie auch ω selber, Kardinalzahlen, hingegen sind $\omega + 1$ oder $\omega \cdot \omega$ keine Kardinalzahlen, denn es gilt $|\omega + 1| = |\omega \cdot \omega| = \omega$.

Weil Kardinalzahlen immer auch Ordinalzahlen sind, sind diese, wie die Ordinalzahlen, wohlgeordnet (durch $\in$).

Die Ordinalzahl ω ist die kleinste unendliche Kardinalzahl – manchmal schreibt man für Kardinalzahl ω auch ω_0. Die kleinste Kardinalzahl, welche grösser als ω ist, wird mit ω_1 bezeichnet. Die Kardinalzahl ω_1 ist also die kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Analog ist ω_2 die kleinste Kardinalzahl, welche grösser als ω_1 ist, etc. Weiter ist zum Beispiel ω_ω die ω-te unendliche Kardinalzahl, ω_{ω_1} ist die ω_1-te unendliche Kardinalzahl und allgemein ist für $\alpha \in \Omega$, ω_α die α-te unendliche Kardinalzahl. Um Kardinalzahlen besser von Ordinalzahlen unterscheiden zu können, schreibt man oft $\aleph_\alpha$ anstelle von ω_α – wobei $\aleph$, genannt "Aleph", der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets ist.

Für Kardinalzahlen $\kappa \in \Omega$ gilt immer $\kappa \in \omega$ oder κ ist eine Limesordinalzahl: Ist $\kappa \notin \omega$, so ist entweder $\omega = \kappa$ (also κ Limesordinalzahl) oder $\omega \in \kappa$. Wäre nun $\kappa = \alpha + 1$ für ein $\alpha \in \Omega$

(d.h. κ Nachfolgerordinalzahl), so wäre $f : \alpha + 1 \to \alpha$ mit

$$f(\beta) := \begin{cases} 0 & \text{für } \beta = \alpha, \\ \beta + 1 & \text{für } \beta \in \omega, \\ \beta & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Bijektion zwischen κ und α, d.h. $|\alpha| = |\kappa|$. Aus $\alpha < \kappa$ erhalten wir $|\kappa| < \kappa$, also ist κ keine Kardinalzahl.

Die Kontinuumshypothese

Mit dem Satz von Cantor ist $\omega < |\mathscr{P}(\omega)|$ und mit Proposition 6.2 haben wir $|\mathscr{P}(\omega)| = |\mathbb{R}|$. Die Frage stellt sich nun, wie gross $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$ ist ($\mathfrak{c}$ steht für die Kardinalität des Kontinuums). Cantors **Kontinuumshypothese** CH besagt nun, dass $\mathfrak{c}$ die kleinste Kardinalzahl grösser als ω ist, d.h. CH ist die Aussage $\mathfrak{c} = \omega_1$. Mit der Forcing-Technik von Cohen lässt sich zeigen, dass CH unabhängig ist von ZFC, d.h. es gibt Modelle von ZFC in denen CH gilt, und es gibt solche, in denen CH nicht gilt. Bei den letzteren Modellen hat man gewisse Freiheiten, wie gross $\mathfrak{c}$ sein kann. Zum Beispiel ist $\mathfrak{c} = \omega_{23}$, $\mathfrak{c} = \omega_{\omega+1}$, oder $\mathfrak{c} = \omega_{\omega_1}$ jeweils konsistent mit ZFC, aber zum Beispiel ist $\mathfrak{c} = \omega_\omega$ oder auch $\mathfrak{c} = \omega_{\omega_\omega}$ nicht konsistent mit ZFC.

Gilt CH, so existiert eine Bijektion $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$. Für jedes $\alpha \in \omega_1$ ist also $r_\alpha := f(\alpha)$ eine reelle Zahl, und weil ω_1 die kleinste überabzählbare Kardinalzahl ist, ist für jedes $\alpha \in \omega_1$ die Menge $\{r_\beta : \beta \in \alpha\} \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar.

Kardinalzahlarithmetik

Für beliebige Kardinalzahlen κ und λ definieren wir:

$$\kappa + \lambda := \big|(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})\big|, \qquad \kappa \cdot \lambda := |\kappa \times \lambda|, \qquad \kappa^\lambda := \big|{}^\lambda\kappa\big|.$$

Weil für alle Mengen A gilt $|{}^A 2| = |\mathscr{P}(A)|$, wird die Kardinalität der Potenzmenge einer Kardinalzahl κ üblicherweise mit 2^κ bezeichnet. Insbesondere ist $\mathfrak{c} = 2^\omega$, weil $\mathfrak{c} = |\mathscr{P}(\omega)|$. Beachte, dass mit dem Satz von Cantor für alle Kardinalzahlen κ gilt $\kappa < 2^\kappa$.

Für das Rechnen mit Kardinalzahlen gelten dieselben Gesetze wie für natürliche Zahlen. Insbesondere gelten für Potenzen von Kardinalzahlen die Potenzgesetze.

Proposition 6.3. *Die Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen ist assoziativ und kommutativ und es gilt das Distributivgesetz für die Multiplikation über der Addition. Weiter haben wir für alle Kardinalzahlen κ, λ, μ*

$$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu, \quad \kappa^{\mu\cdot\lambda} = (\kappa^\lambda)^\mu, \quad (\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu.$$

Beweis. Aus den obigen Definitionen folgt sofort, dass die Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen assoziativ und kommutativ ist und das Distributivgesetz gilt. Um die Potenzgesetze nachzuweisen, seien κ, λ, μ beliebige Kardinalzahlen.

Für jede Funktion $f : (\lambda \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\}) \to \kappa$ seien die Funktionen $f_\lambda : (\lambda \times \{0\}) \to \kappa$ und $f_\mu : (\mu \times \{1\}) \to \kappa$ so, dass für jedes $x \in (\lambda \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})$,

$$f(x) = \begin{cases} f_\lambda(x) & \text{falls } x \in \lambda \times \{0\}, \\ f_\mu(x) & \text{falls } x \in \mu \times \{1\}. \end{cases}$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass jeder Funktion $f : (\lambda\times\{0\})\cup(\mu\times\{1\}) \to \kappa$ genau ein Paar von Funktionen $\langle f_\lambda, f_\mu\rangle$ entspricht, und dass umgekehrt jedes Paar von Funktionen $\langle f_\lambda, f_\mu\rangle$ genau

eine Funktion $f : (\lambda \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\}) \to \kappa$ definiert. Somit haben wir eine Bijektion zwischen $\kappa^{\lambda+\mu}$ und $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.

Für jede Funktion $f : \mu \to {}^\lambda\kappa$, sei $\tilde{f} : \mu \times \lambda \to \kappa$ so, dass für alle $\alpha \in \mu$ und alle $\beta \in \lambda$ gilt

$$\tilde{f}\big(\langle \alpha, \beta \rangle\big) = f(\alpha)(\beta).$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}^\mu\big({}^\lambda\kappa\big) & \longrightarrow & {}^{\mu\times\lambda}\kappa \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

bijektiv ist, und somit haben wir auch $\kappa^{\mu\cdot\lambda} = (\kappa^\lambda)^\mu$ gezeigt.

Für jede Funktion $f : \mu \to \kappa \times \lambda$ seien die Funktionen $f_\kappa : \mu \to \kappa$ und $f_\lambda : \mu \to \lambda$ so, dass für jedes $\alpha \in \mu$ gilt $f(\alpha) = \langle f_\kappa(\alpha), f_\lambda(\alpha) \rangle$. Es ist wieder leicht nachzuprüfen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}^\mu(\kappa \times \lambda) & \longrightarrow & {}^\mu\kappa \times {}^\mu\lambda \\ f & \longmapsto & \langle f_\kappa, f_\lambda \rangle \end{array}$$

bijektiv ist, und somit haben wir auch die Gleichung $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$ gezeigt. ⊣

Das nächste Resultat zeigt, dass die Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen sehr einfach ist.

THEOREM 6.4. *Für alle Ordinalzahlen $\alpha, \beta \in \Omega$ gilt*

$$\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\alpha \cdot \omega_\beta = \omega_{\alpha\cup\beta} = \max\{\omega_\alpha, \omega_\beta\}.$$

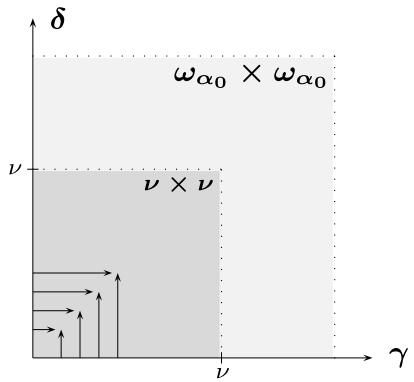
Insbesondere gilt für jede unendliche Kardinalzahl κ, $\kappa^2 = \kappa$.

Beweis. Weil die Kardinalzahlen linear geordnet sind, genügt es zu zeigen, dass für alle $\alpha \in \Omega$ gilt $\omega_\alpha \cdot \omega_\alpha = \omega_\alpha$.

Für $\alpha = 0$ wissen wir bereits, dass $|\omega \times \omega| = \omega$ gilt, und somit haben wir $\omega_0 \cdot \omega_0 = \omega_0$. Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass ein $\alpha \in \Omega$ existiert, sodass $\omega_\alpha \cdot \omega_\alpha > \omega_\alpha$. Weil die Ordinalzahlen wohlgeordnet sind, existiert eine kleinste Ordinalzahl α_0 mit dieser Eigenschaft, d.h. $\omega_{\alpha_0} \cdot \omega_{\alpha_0} > \omega_{\alpha_0}$ und für alle $\beta \in \alpha_0$ ist $\omega_\beta \cdot \omega_\beta = \omega_\beta$. Auf der Menge $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ definieren wir die Ordnungsrelation $\prec$ durch

$$\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle \prec \langle \gamma_2, \delta_2 \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \max\{\gamma_1, \delta_1\} < \max\{\gamma_2, \delta_2\}, \text{ oder} \\ \max\{\gamma_1, \delta_1\} = \max\{\gamma_2, \delta_2\} \wedge \gamma_1 < \gamma_2, \text{ oder} \\ \max\{\gamma_1, \delta_1\} = \max\{\gamma_2, \delta_2\} \wedge \gamma_1 = \gamma_2 \wedge \delta_1 < \delta_2. \end{cases}$$

Die folgende Graphik soll die Ordnungstruktur von $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ (bzgl. $\prec$) veranschaulichen:



Bezüglich der Ordnungsrelation $\prec$ sind die kleinsten Elemente von $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$

$$\langle 0,0\rangle \prec \langle 0,1\rangle \prec \langle 1,0\rangle \prec \langle 1,1\rangle \prec \langle 0,2\rangle \prec \langle 1,2\rangle \prec \langle 2,0\rangle \prec \langle 2,1\rangle \prec \langle 2,2\rangle \prec \langle 0,3\rangle \prec \cdots$$

und allgemein haben wir für $\alpha \in \beta \in \omega_{\alpha_0}$ immer $\langle \alpha, \beta\rangle \prec \langle \beta, \alpha\rangle$.

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Ordnungsrelation $\prec$ eine lineare Ordnung auf $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ ist, und weil ω_{α_0} eine Ordinalzahl ist, lässt sich zeigen, dass $\prec$ sogar eine Wohlordnung auf $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ ist: Sei $X \subseteq \omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ eine nicht-leere Menge. Aus all den Paaren $\langle \gamma, \delta\rangle \in X$ mit kleinstem $\max\{\gamma, \delta\}$ wählen wir zuerst die Paare mit der kleinsten ersten Koordinate γ_0 aus, und aus diesen Paaren wiederum das Paar mit der kleinsten zweiten Koordinate δ_0. Das Paar $\langle \gamma_0, \delta_0\rangle \in X$ ist dann das $\prec$-minimale Element von X.

Aus dem Beweis des Wohlordnungsprinzips folgt, dass es eine (und nur eine) Ordinalzahl $\eta \in \Omega$ gibt, sodass eine Bijektion $\Gamma : \eta \to \omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ existiert mit der Eigenschaft, dass für alle $\alpha, \alpha' \in \eta$ gilt:

$$\alpha < \alpha' \iff \Gamma(\alpha) \prec \Gamma(\alpha')$$

Da mit unserer Annahme die Ungleichung $\omega_{\alpha_0} < |\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}|$ gilt, haben wir $\omega_{\alpha_0} < |\eta|$. Sei nun

$$\langle \gamma_0, \delta_0\rangle := \Gamma(\omega_{\alpha_0}).$$

Da $\omega_{\alpha_0} \in \eta$ ist, gibt es solch ein Paar $\langle \gamma_0, \delta_0\rangle \in \omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$. Insbesondere sind $\gamma_0, \delta_0 \in \omega_{\alpha_0}$, und für $\nu = \max\{\gamma_0, \delta_0\}$ haben wir

$$|\nu| < \omega_{\alpha_0} \quad \text{und} \quad \omega_{\alpha_0} \leq |\nu \times \nu|\,.$$

Schliesslich sei $\omega_\beta = |\nu|$. Dann ist $\beta < \alpha_0$ und mit der Wahl von von ω_{α_0} gilt $\omega_\beta \cdot \omega_\beta = \omega_\beta$. Andererseits ist $\omega_\beta \cdot \omega_\beta \geq \omega_{\alpha_0}$ und da $\omega_{\alpha_0} > \omega_\beta$ erhalten wir den gewünschten Widerspruch. ⊣

Als eine Folgerung aus Theorem 6.4 erhalten wir folgendes Resultat.

KOROLLAR 6.5. *Ist κ eine unendliche Kardinalzahl, so gilt:*

(a) *Für alle $n \in \omega$ ist $\kappa^{n+1} = \kappa$.*
(b) $\sum_{n\in\omega} \kappa^n = \kappa$
(c) $\kappa^\kappa = 2^\kappa$

Beweis. (a) Der Beweis erfolgt mittels Induktion über $n \in \omega$: Ist $n = 0$, dann gilt nach Definition $\kappa^1 = \kappa$. Ist $n = 1$, dann erhalten wir mit Theorem 6.4, $\kappa^2 = \kappa$. Sei die Aussage $\kappa^{n+1} = \kappa$ bewiesen für ein $n \in \omega$. Dann ist $\kappa^{n+2} = \kappa \cdot \kappa^{n+1}$ und mit der Voraussetzung erhalten wir $\kappa^{n+2} = \kappa \cdot \kappa$. Mit Theorem 6.4 erhalten wir schliesslich $\kappa^{n+2} = \kappa$.

(b) Mit (a) erhalten wir $\sum_{n\in\omega} \kappa^n = 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots + \kappa^n + \ldots = 1 + \kappa \cdot \omega = 1 + \kappa = \kappa$.

(c) Weil κ unendlich ist, gilt $\kappa^\kappa = |{}^\kappa\kappa| \geq |{}^\kappa 2| = 2^\kappa$. Andererseits ist jede Funktion $f \in {}^\kappa\kappa$ eine Teilmenge von $\kappa \times \kappa$. Somit ist $|{}^\kappa\kappa| \leq |\mathscr{P}(\kappa \times \kappa)|$ und weil $|\kappa \times \kappa| = \kappa$, erhalten wir $\kappa^\kappa \leq |\mathscr{P}(\kappa)| = 2^\kappa$. Mit dem CANTOR-BERNSTEIN THEOREM folgt somit $\kappa^\kappa = 2^\kappa$. ⊣

Bezüglich $\mathfrak{c}$ erhalten wir zum Beispiel $\mathfrak{c}^\mathfrak{c} = 2^\mathfrak{c}$, und weil $\mathfrak{c} = 2^\omega$, ist

$$\mathfrak{c}^\omega = \left(2^\omega\right)^\omega = 2^{\omega\cdot\omega} = 2^\omega = \mathfrak{c}.$$

Für eine unendliche Kardinalzahl κ sei $\kappa^{<\omega}$ die Kardinalität der Menge der endlichen Sequenzen die mit den Elementen von κ gebildet werden können, also

$$\kappa^{<\omega} := \left|\left\{s \in {}^n\kappa : n \in \omega\right\}\right|.$$

Mit Korollar 6.5.(b) gilt dann $\kappa^{<\omega} = \sum_{n\in\omega} \kappa^n = \kappa$. Weil nun jede endliche Teilmenge von κ nach der Grösse ihrer Elemente geordnet werden kann, folgt daraus, dass die Menge der endlichen Teilmengen einer unendlichen Kardinalzahl κ ebenfalls die Kardinalität κ hat.

7. GRUNDBEGRIFFE DER GRAPHENTHEORIE

KNOTEN, KANTEN, GRADE

Ein **Graph** kann aufgefasst werden als eine $\mathscr{L}$-Struktur mit einem Bereich V, wobei die Signatur $\mathscr{L}$ aus einer oder mehreren binären Relationssymbolen E bzw. $E_0, \ldots, E_k$ (für $k \in \omega$) besteht. Ein Graph G besteht also aus einer Menge V, den sogenannten **Knoten** (engl. *vertices*), und einer oder mehrerer Mengen $E \subseteq V \times V$ bzw. $E_0, \ldots, E_k \subseteq V \times V$, den sogenannten **Kanten** (engl. *edges*). Wir schreiben also $G = (V, E)$ bzw. $G = (V, E_0, \ldots, E_k)$.

xEy bzw. $\langle x, y\rangle \in E$ bedeutet, dass x und y durch eine Kante von x nach y verbunden sind; x und y heissen dann **adjazent**. Ist $G = (V, E)$ ein Graph und ist die Relation E symmetrisch, d. h. $\forall x, y \in V\,(xEy \leftrightarrow yEx)$, so ist G ein **ungerichteter** Graph, andernfalls ist G ein **gerichteter** Graph, auch **Digraph** genannt. Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, so indentifizieren wir die Kanten $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, x\rangle$ und schreiben $\{x, y\} \in E$.

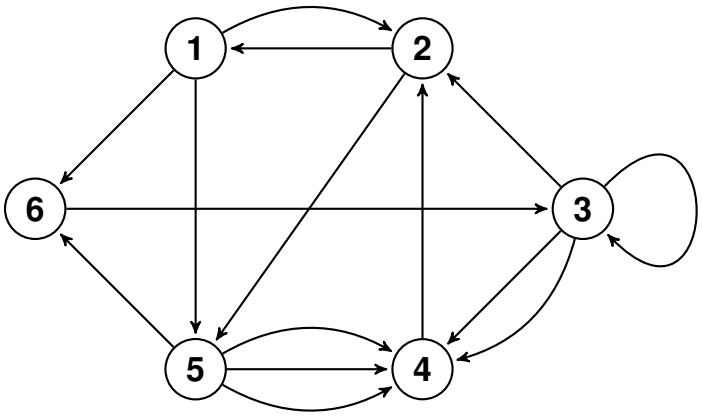
Eine Kante $\langle x, x\rangle$ heisst **Schlinge** (engl. *loop*). Ein Graph $G = (V, E)$ ist **schlingenfrei**, wenn er keine Schlingen besitzt, wenn also $\forall x \in V\,(\neg xEx)$ gilt. Wenn wir mehrere Relationen $E_0, \ldots, E_k$ in $\mathscr{L}$ haben, so kann der Graph $(V, E_0, \ldots, E_k)$ auch mehrere Kanten zwischen zwei Knoten x und y besitzen. Solche *Mehrfachkanten* sind verschieden, da sie zu verschiedenen Relationen E_i gehören. Ein Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten heisst **schlicht**.

Ist $G = (V, E)$ ein endlicher Graph, d. h. $V = \{v_1, \ldots v_n\}$ für ein $n \in \omega$ und $E \subseteq V \times V$, so können wir den Graphen G mit einer $(n \times n)$-Matrix $A(G) = (a_{ij})$, der sogenannten **Adjazenzmatrix** von G, darstellen, welche wie folgt definiert ist:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \langle v_i, v_j\rangle \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $G = (V, E_0, \ldots, E_k)$ ein endlicher Graph mit Mehrfachkanten, so ist die Adjazenzmatrix $A(G)$ von G die Summe der Adjazenzmatrizen $A(G_l)$ der Graphen $G_l = (V, E_l)$, d. h. $A(G) = \sum_{l=0}^{k} A(G_l)$. Die Adjazenzmatrix $A(G)$ eines Graphen G ist genau dann symmetrisch, wenn G ein ungerichteter Graph ist.

Beispiel eines gerichteten Graphen und seiner Adjazenzmatrix:



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Grad eines Knotens $x \in V$ "misst" wie viele Kanten von x ausgehen bzw. in x zusammenkommen.

Wir definieren Grade von Knoten zuerst für Digraphen: Sei $G = (V, E)$ ein Digraph. Für $x \in V$ seien

$$\Gamma^+(x) := \big\{y \in V : \langle x, y\rangle \in E\big\} \quad \text{und} \quad \Gamma^-(x) := \big\{y \in V : \langle y, x\rangle \in E\big\}.$$

Weiter seien

$$\deg^+(x) := |\Gamma^+(x)| \quad \text{und} \quad \deg^-(x) := |\Gamma^-(x)|.$$

Für $x \in V$ heisst $\deg^+(x)$ **positiver Halbgrad** von x und $\deg^-(x)$ heisst **negativer Halbgrad** von x. Manchmal wird $\deg^+(x)$ auch mit $d_{\text{out}}(x)$ und $\deg^-(x)$ auch mit $d_{\text{in}}(x)$ bezeichnet. Schliesslich sei $\deg(x) := \deg^+(x) + \deg^-(x)$ der **Grad** von x. Beachte: Schlingen werden für den Grad doppelt gezählt.

Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, so definieren wir für $x \in V$:

$$\Gamma(x) := \big\{y \in V : \{x, y\} \in E\big\} \quad \text{und} \quad \deg(x) := |\Gamma(x)| + |\big\{x \in V : \{x\} \in E\big\}|.$$

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $\deg(x) = r$ für alle $x \in V$ heisst **regulär** vom Grad r.

Ein ungerichteter Graph heisst **vollständig**, falls für alle Knoten $x \neq y$ gilt $\{x, y\} \in E$. Der vollständige, ungerichtete, schlichte Graph mit n Knoten wird mit K_n bezeichnet. K_n ist ein regulärer Graph vom Grad $n - 1$.

Teilgraphen, Pfeil- und Kantenzüge

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$, so ist G' ein **Teilgraph** von G, geschrieben $G' \subseteq G$.

Spezialfälle

- Sei $U \subseteq V$. Der **durch U erzeugte** Teilgraph $G' = G_U \subseteq G$ ist definiert durch
$$V' := U \quad \text{und} \quad E' := \big\{\langle x, y\rangle \in E : \{x, y\} \subseteq U\big\}.$$
- Sei $F \subseteq E$. Der **durch F erzeugte** Teilgraph $G' = G_F \subseteq G$ ist definiert durch
$$V' := \bigcup \big\{\{x, y\} \subseteq V : \langle x, y\rangle \in F\big\} \quad \text{und} \quad E' := F.$$

Sei $G = (V, E)$ ein Digraph (nicht notwendigerweise schlingenfrei) und sei $H \subseteq E$ eine nicht-leere, endliche Kantenteilmenge sodass für ein $l \geq 1$ gilt:

$$|H| = l \quad \text{und} \quad H = \big\{\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{l-1}, x_l\rangle\big\}.$$

Der durch H erzeugte Teilgraph G_H heisst **Pfeilzug von x_0 nach x_l** der Länge l. Wir unterscheiden:

- **offener Pfeilzug**, falls $x_0 \neq x_l$
- **geschlossener Pfeilzug** falls $x_0 = x_l$,

Beachte, dass in einem Pfeilzug die Kanten paarweise verschieden sind. Falls auch die x_i paarweise verschieden sind, so heisst G_H **Bahn von x_0 nach x_l** der Länge l. Falls die x_i paarweise verschieden sind ausser $x_0 = x_l$, so ist G_H ein **Wirbel**.

Aus den Definitionen folgt, dass jeder offene Pfeilzug von a nach b eine Bahn von a nach b als Teilgraphen enthält, und dass jeder geschlossene Pfeilzug immer einen Wirbel als Teilgraphen enthält.

Für ungerichtete Graphen sind die Definitionen analog und wir sprechen im ungerichteten Fall von **offenen** bzw. **geschlossenen Kantenzügen** (anstelle von Pfeilzügen), sowie von **Wegen** und **Kreisen** (anstelle von Bahnen und Wirbeln).

Die Definition sind analog für Graphen mit Mehrfachkanten, wobei Mehrfachkanten wieder als verschieden betrachtet werden.

Ein Graph (gerichtet oder ungerichtet) heisst **zusammenhängend**, wenn jedes Paar von verschiedenen Knoten durch einen Weg (ungerichtet) verbunden ist.

Pfeilfolgen bestimmter Länge

Eine Folge der Länge l von Kanten $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\ldots$, $\langle x_{l-1}, x_l\rangle$ eines Graphen $G = (V, E_0, \ldots, E_k)$, in der Kanten auch mehrfach vorkommen können, nennen wir eine **Pfeilfolge von x_0 nach x_l der Länge l.**

Mit der Adjazenzmatrix eines Digraphen $G = (V, E_0, \ldots, E_k)$ können wir bestimmen, wie viele verschiedene Peilfolgen einer bestimmten Länge es zwischen zwei Knoten gibt.

Proposition 7.1. *Sei $G = (V, E_0, \ldots, E_k)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ein endlicher Digraph und sei A die Adjazenzmatrix von G. Sei A^k die k-te Potenz von A für ein $k \geq 1$. Ist $A^k := \left(a_{ij}^{[k]}\right)$, so ist $a_{ij}^{[k]}$ die Anzahl der verschiedenen Pfeilfolgen von v_i nach v_j der Länge k.*

Beweis. Mit Induktion nach k. Für $k = 1$ folgt die Behauptung aus der Definition der Adjazenzmatrix. Es gilt also für alle $l, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } 1 \text{ von } v_l \text{ nach } v_j.$$

Sei die Behauptung richtig für ein $k \geq 1$. Dann gilt für alle $i, l \in \{1, \ldots, n\}$:

$$a_{il}^{[k]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_l.$$

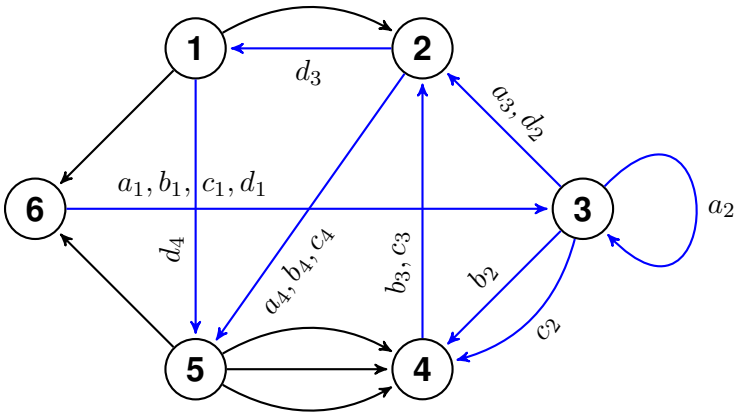
Somit gilt für jedes i, für jedes j und für jedes l:

$$a_{il}^{[k]} \cdot a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k+1 \text{ von } v_i \text{ nach } v_j \text{ via } v_l,$$

und

$$a_{ij}^{[k+1]} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{[k]} \cdot a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k+1 \text{ von } v_i \text{ nach } v_j. \qquad \dashv$$

Obiges Beispiel mit A^4: Es gibt 4 verschiedene Pfeilfolgen a, b, c, d der Länge 4 vom Knoten 6 zum Knoten 5.



$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 14 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 11 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & \mathbf{4} & 2 \end{pmatrix}$$

EULER'SCHE LINIEN & EULER'SCHE PFEILZÜGE

PROPOSITION 7.2. *Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter Graph. Dann gilt:*

(a) Ist $|E| = m$, d. h.

$$\big|\big\{\{x, y\} \subseteq V : \langle x, y\rangle \in E\big\}\big| = m,$$

so ist $\sum_{x\in V} \deg(x) = 2m$.

(b) Für alle Knoten $x \in V$ ist $\big|\big\{x \in V : \deg(x)$ ist ungerade$\big\}\big|$ ist gerade.

Beweis. (a) In der Summe $\sum_{x\in V} \deg(x)$ wird jede Kante zweimal gezählt (auch bei Schlingen), denn jede Kante verbindet entweder zwei verschiedene Knoten oder sie ist eine Schlinge.

(b) Dies folgt direkt aus (a). ⊣

Enthält ein geschlossener Kantenzug eines Graphen G sämtliche Kanten von G, so heisst der Kantenzug **Euler'sche Linie** des Graphen G, und G heisst **Euler'scher Graph**.

PROPOSITION 7.3. *Ein endlicher, ungerichteter, zusammenhängender Graph G ist genau dann ein Euler'scher Graph, wenn jeder Knoten von G geraden Grad besitzt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Besitzt G eine Euler'sche Linie, so kann G in einem Zug gezeichnet werden. Somit ist beim Durchlaufen der Kanten jeder Knoten genauso oft Endpunkt wie Anfangspunkt einer Kante.

($\Leftarrow$) Hat jeder Knoten geraden Grad, so hat, weil der Graph zusammenhängend ist, jeder Knoten mindestens Grad 2.

Wir starten nun in irgend einem Knoten x_0. Da jeder Knoten geraden Grad hat, können wir von jedem von x_0 verschiedenen Knoten aus weiter gehen, und da der Graph endlich ist, müssen wir nach endlich vielen Schritten wieder zu x_0 kommen. Folglich gibt es einen geschlossenen Kantenzug beginnend in x_0.

Haben auf diesem Kantenzug alle Kanten besucht, so sind wir fertig. Andernfalls gibt es auf dem Kantenzug ein Knoten x_1, von dem unbesuchte Kanten ausgehen. Deren Anzahl ist notwendigerweise gerade.

Wir beginnen nun im Knoten x_1 und gehen so lange entlang von noch nicht durchlaufenen Kanten, bis wir wieder beim Knoten x_1 ankommen. Die beiden so erhaltenen Kantenzüge können wir zu einem einzigen Kantenzug zusammenfügen, der in x_0 beginnt und endet.

Haben wir nun auf diesem Kantenzug alle Kanten besucht, so sind wir fertig. Andernfalls machen wir weiter wie oben. Da nun der Graph zusammenhängend ist, wird schliesslich jede Kante besucht und der resultierende geschlossene Kantenzug ist eine Euler'sche Linie. ⊣

Eine Umformulierung der obigen Proposition gibt uns den folgenden Satz von Euler.

THEOREM 7.4 (Euler). *Sämtliche Kanten eines endlichen, ungerichteten, zusammenhängenden Graphen G können genau dann in einem geschlossenen Kantenzug durchlaufen werden, wenn jeder Knoten von G geraden Grad besitzt.*

Enthält ein offener Kantenzug eines Graphen G sämtliche Kanten von G, so heisst der Kantenzug **offene Euler'sche Linie** des Graphen G.

Wie oben können wir folgende Proposition beweisen:

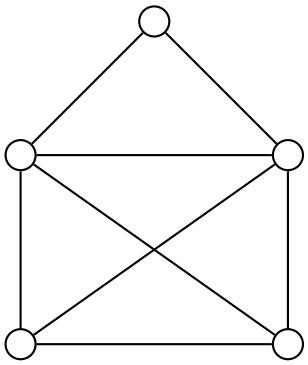
PROPOSITION 7.5. *Ein endlicher, ungerichteter, zusammenhängender Graph G besitzt genau dann eine offene Euler'sche Linie, wenn genau zwei Knoten von G ungeraden Grad besitzen.*

Analog zu (offene) Euler'sche Linie definieren wir **(offener) Euler'scher Pfeilzug**. Wie oben, können wir folgende Proposition beweisen.

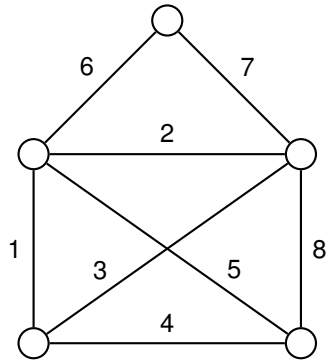
PROPOSITION 7.6. *Ein endlicher, gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann einen Euler'schen Pfeilzug, bzw. einen offenen Euler'schen Pfeilzug, wenn für alle $x \in V$ gilt $\deg^+(x) = \deg^-(x)$, bzw. für genau zwei Knoten $x_1, x_2 \in V$ gilt $\deg^+(x_1) - \deg^-(x_1) = 1$ und $\deg^+(x_2) - \deg^-(x_2) = -1$.*

Beispiele:

- Der folgende Graph kann in einem Zug gezeichnet werden.



Eine Möglichkeit ist zum Beispiel:



- **Dominoproblem**: Die Aufgabe ist, sämtliche Dominosteine eines Dominospiels, in dem die Augenzahlen der Steine von 0 bis 16 gehen und auch Doppelsteine mit zweimal derselben Augenzahl vorkommen, so zu einer fortlaufenden (unverzweigten) geschlossenen Kette aneinanderzureihen, dass die aneinander grenzenden Hälften zweier Steine stets dieselbe Augenzahl aufweisen.

  Um dieses Problem zu lösen betrachten den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &:= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}, \\ E &:= \big\{\{a, b\} : a, b \in V\big\}. \end{aligned}$$

  G ist dann ein regulärer Graph vom Grad 18 (der K_{17} mit 16 Schlingen enthält). Da 18 gerade ist, besitzt G eine Euler'sche Linie, und weil jede Kante als ein Dominostein aufgefasst werden kann (die Nummern der Knoten, welche durch eine Kante verbundenen werden, bezeichnen die Augenzahlen auf dem zur Kante gehörenden Dominostein), entspricht jede Euler'sche Linie in G einer Lösung des Dominoproblems.

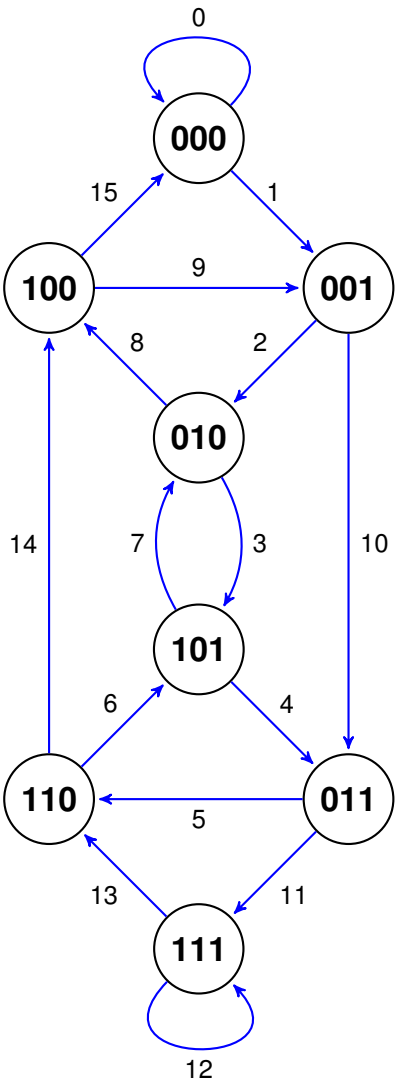
- Eine zyklische 0-1–Folge der Länge l heisst **De Bruijn–Folge**, wenn für ein $k \geq 1$ jedes binäre Wort der Länge k genau einmal als Teilwort (zyklisch) auftritt. Aus der Definition folgt, dass, falls eine solche Folge existiert, $l = 2^k$ ist.

  Wir zeigen nun, dass zu jedem k eine De Bruijn–Folge existiert: Für $k = 1$ ist die zyklische Folge 01 der Länge 2 eine De Bruijn–Folge. Sei nun $k \geq 2$. Wir betrachten den Graphen $G_k = (V, E)$ mit

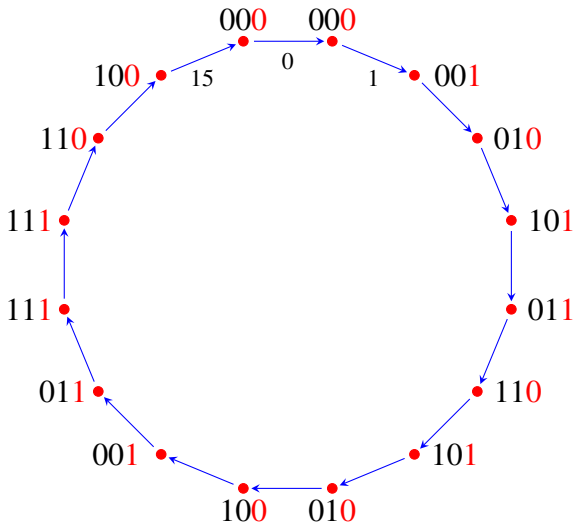
$$V := \{\langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle : b_i \in \{0,1\}\},$$
$$E := \left\{\left\langle \langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle, \langle b_2, \ldots, b_k\rangle \right\rangle : \langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle, \langle b_2, \ldots, b_k\rangle \in V\right\}.$$

  Es ist $|V| = 2^{k-1}$ und $|E| = 2^k$. Weiter gilt für alle $x \in V$, $\deg^+(x) = \deg^-(x) = 2$, und somit enthält G_k einen Euler'schen Pfeilzug. Jeder Euler'sche Pfeilzug von G_k der Länge 2^k erzeugt in natürlicher Weise eine De Bruijn–Folge. Ein Beispiel für $k = 4$:

Euler'scher Pfeilzug



De Bruijn–Folge

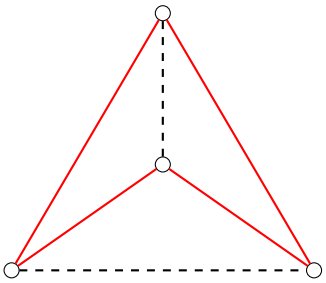


Bemerkung: Zu jedem $k \geq 1$ existieren bis auf zyklische Vertauschung genau $2^{2^{k-1}-k}$ De Bruijn–Folgen. Für $k = 1$ und $k = 2$ existieren somit nur die De Bruijn–Folgen 01 bzw. 0011, und für $k = 3$ existieren die beiden De Bruijn–Folgen 00010111 und 00011101.

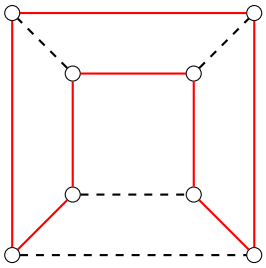
HAMILTON'SCHE GRAPHEN

Ein endlicher ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein **Hamilton'scher Graph**, bzw. G ist **hamiltonsch**, wenn G einen Kreis – einen sogenannten **Hamilton-Kreis** – besitzt der alle Knoten von G enthält. Mit anderen Worten, G ist hamiltonsch genau dann, wenn es in G einen Kreis gibt, der alle Knoten von G enthält. Es ist kein einfaches Kriterium bekannt, mit welchem entschieden werden kann, ob ein Graph hamiltonsch ist (im Gegensatz zum Beispiel zu Euler'schen Graphen).

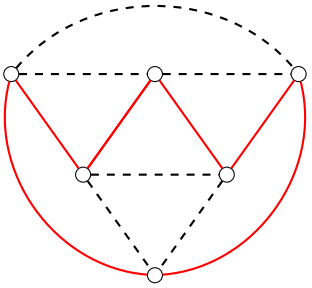
Beispiele für hamiltonsche Graphen sind die vollständigen Graphen K_n (für $n \geq 2$) sowie die Kantengraphen der fünf platonischen Körper:



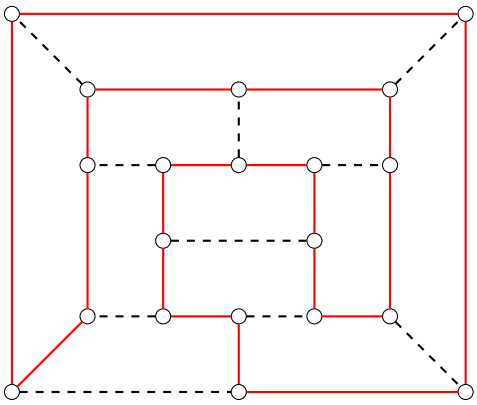
Tetraeder



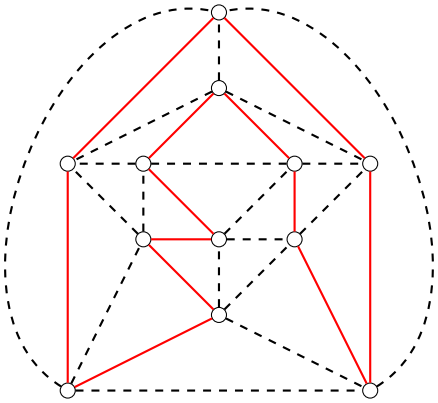
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

Ebenfalls hamiltonsch sind die Kantengraphen der k-dimensionalen Würfel (für $k \geq 2$). Dafür zeigen wir zuerst den folgenden Satz über *Gray-Codes*: Eine zyklische Folge, bestehend aus den 2^k verschiedenen binären Wörtern der Länge $k \geq 1$, heisset **Gray-Code**, falls sich je zwei aufeinander folgende Wörter in genau einer Stelle unterscheiden.

PROPOSITION 7.7. *Zu jedem $k \geq 1$ existiert ein Gray-Code.*

Beweis. Mit Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die zyklische Folge $0, 1$ der einzige Gray-Code. Ist

$$(a_1, \ldots, a_{2^k})$$

ein Gray-Code für k, wobei jedes a_i ein binäres Wort der Länge k ist, so sind die 2^{k+1} binären Wörter

$$\big(0\,a_1, \ldots, 0\,a_{2^k}, 1\,a_{2^k}, 1\,a_{2^k-1}, \ldots, 1\,a_1\big)$$

der Länge $k + 1$ ein Gray-Code für $k + 1$. ⊣

KOROLLAR 7.8. *Der Kantengraph des k-dimensionalen Würfels (für $k \geq 2$) ist hamiltonsch.*

Beweis. Die binären Wörter der Länge k können als Ecken eines k-dimensionalen Würfels aufgefasst werden. Ein Gray-Code entspricht dann einem Hamilton-Kreis im Kantengraphen des k-dimensionalen Würfels. ⊣

Beispiel: Im Fall $k = 4$ gibt uns der Beweis von Proposition 7.7 den folgenden Gray-Code mit dem entsprechenden Hamilton-Kreis im Kantengraphen des 4-dimensionalen Würfels.

Gray-Code

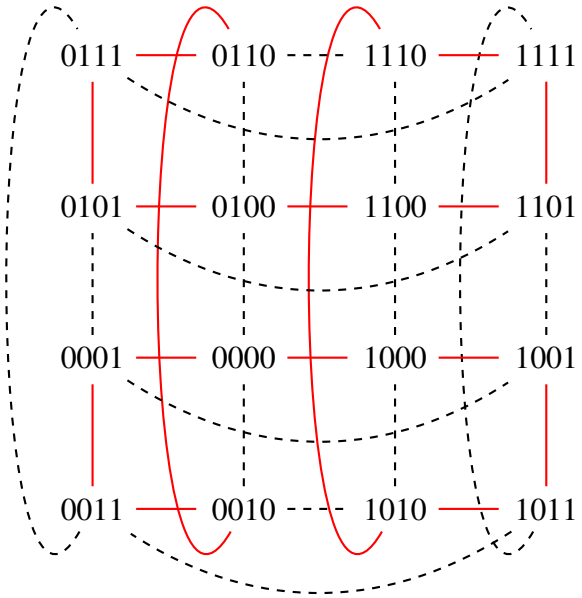
0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 1
0 0 1 0

0 1 1 0
0 1 1 1
0 1 0 1
0 1 0 0

1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 1
1 1 1 0

1 0 1 0
1 0 1 1
1 0 0 1
1 0 0 0

Hamilton-Kreis



Der Heiratssatz

Die Knotenmenge eines **bipartiten Digraphen** (A, B, E) besteht aus zwei disjunkten Mengen A, B (d. h. die Knotenmenge ist $A \dot\cup B$) und einer Kantenmenge $E \subseteq A \times B$. Für $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ sei

$$EX := \big\{y \in B : \exists x \in X\,(xEy)\big\} \quad \text{und} \quad E^{-1}Y := \big\{x \in A : \exists y \in Y\,(xEy)\big\}.$$

Erweitern wir die Kantenmenge E eines bipartiten Digraphen (A, B, E) zu

$$E^* := E \cup \big\{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in E\big\},$$

so ist (A, B, E^*) ein **ungerichteter bipartiter Graph**.

Ist (A, B, E) ein bipartiter Digraph und gilt xEy, also insbesondere $x \in A$ und $y \in B$, so sagen wir, dass x und y befreundet sind. Eine injektive Funktion $\pi : A \to B$ mit $\pi \subseteq E$ ist dann eine **Verheiratung** aller Elemente von A mit Elementen der Menge B, wobei nur befreundete Elemente miteinander verheiratet werden.

Der Heiratssatz (Hall). *Sei (A, B, E) ein bipartiter Digraph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\exists \pi \in {}^{A}B\big(\pi \subseteq E$ *und* π *ist injektiv*$\big)$, *d. h. es gibt eine Verheiratung aller Elemente von A mit Elementen von B.*

(b) Hall'sche Bedingung: $\forall X \subseteq A\,\big(|X| \leq |EX|\big)$

Beweis. (a)⇒(b): Aus (a) folgt $|X| = |\pi[X]| \leq |EX|$ für alle $X \subseteq A$.

(b)⇒(a): Mit Induktion nach $|A| =: n$. Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei $n > 1$ und sei der Satz bewiesen für alle n' mit $1 \leq n' < n$. Wir betrachten die folgenden beiden Fälle.

1. Fall: Für alle $X \subsetneq A$ sei $|X| < |EX|$. Sei $a'Eb'$ und sei $A' := A \setminus \{a'\}$, $B' := B \setminus \{b'\}$ und $E' := E \cap (A' \times B')$, d. h. E' ist die Menge aller Kanten in E die weder in a' starten noch in b' enden. Dann ist (A', B', E') ein bipartiter Digraph und mit unserer Annahme folgt

$$X \subseteq A' \;\Rightarrow\; |X| < |EX| \;\Rightarrow\; |X| \leq |EX| - 1 \leq |EX \setminus \{b'\}| = |E'X|.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung für $n' := |A'| = n-1$ erhalten wir eine Injektion $\pi' : A' \to B'$ mit $\pi' \subseteq E'$ und

$$\pi := \pi' \cup \{\langle a', b' \rangle\}$$

hat die gewünschten Eigenschaften.

2. Fall: Es existiert $A_1 \subsetneq A$ mit $|A_1| = |EA_1|$. Sei $B_1 := EA_1$, und sei $A_2 := A \setminus A_1$, $B_2 := B \setminus B_1$, $E_1 := E \cap (A_1 \times B_1)$ und $E_2 := E \cap (A_2 \times B_2)$. Nun kann die Induktionsvoraussetzung sowohl auf (A_1, B_1, E_1) wie auch auf (A_2, B_2, E_2) angewandt werden und wir erhalten zwei Injektionen $\pi_1 : A_1 \to B_1$ und $\pi_2 : A_2 \to B_2$ mit $\pi_1 \subseteq E_1$ und $\pi_2 \subseteq E_2$. Die Existenz einer Injektion π_1 ist klar, denn aus $X \subseteq A_1$ folgt $EX \subseteq B_1$. Um zu sehen, dass eine Injektion $\pi_2 : A_2 \to B_2$ existiert, nehmen wir für einen Widerspruch an, dass eine Menge $X \subseteq A_2$ existiert mit $|X| > |E_2X|$, wobei $E_2X \subseteq B_2$. Mit der Definition der Mengen A_1 und A_2, der Annahmen $|A_1| = |EA_1|$ und $|E_2X| < |X|$, sowie der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$|E(A_1 \dot\cup X)| = |EA_1 \cup EX| = |EA_1 \dot\cup E_2X| = |EA_1| + |E_2X| < |A_1| + |X| = |A_1 \dot\cup X|,$$

was aber ein Widerspruch zur Voraussetzung (b) ist.
Mit den Injektionen π_1 und π_2 definieren wir nun $\pi : A \to B$ wie folgt:

$$\pi(a) := \begin{cases} \pi_1(a) & \text{für } a \in A_1, \\ \pi_2(a) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\pi : A \to B$ eine Injektion mit $\pi \subseteq E$, d. h. π hat die gewünschten Eigenschaften. ⊣

Das folgende Resultat behandelt den Fall, wenn jedes Element aus A (bzw. B) mit r (bzw. s) Elementen aus B (bzw. A) befreundet ist.

KOROLLAR 7.9. *Sei (A, B, E) ein bipartiter Digraph mit $|A| = n \leq m = |B|$. Existieren positive ganze Zahlen r und s, sodass gilt $\forall a \in A\,(|E\{a\}| = r)$ und $\forall b \in B\,(|E^{-1}\{b\}| = s)$, so existiert eine Verheiratung aller Elemente von A mit Elementen von B.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Hall'sche Bedingung erfüllt ist. Nach Voraussetzung gilt $r \cdot n = |E| = s \cdot m$. Somit ist $s = \frac{r \cdot n}{m}$, und weil $n \leq m$ ist $s \leq r$. Wäre nun die Hall'sche Bedingung nicht erfüllt, so gäbe es eine Menge $X \subseteq A$ mit $l := |X| > |EX| =: k$. Sei $B' := EX$ und $E' := E \cap (X \times B')$. Dann ist $r \cdot l = |E'| \leq s \cdot k$, also $s \geq \frac{r \cdot l}{k}$. Weil $l > k$ ist $\frac{r \cdot l}{k} > r$ und somit erhalten wir $s > r$, was aber $s \leq r$ widerspricht. ⊣

Um den nächsten Satz zu formulieren, müssen wir die Begriffe *trennende Knotenmenge* und *Paarung* einführen.

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger ungerichteter Graph und seien $A, B \subseteq V$ zwei disjunkte Knotenmengen (d. h. $A \cap B = \emptyset$). Weiter sei $U \subseteq V$ eine beliebige Knotenmenge. Dann werden die Mengen A und B durch die Menge U **getrennt**, wenn jeder Kantenzug von einem Knoten $a \in A$ nach einem Knoten $b \in B$ mindestens einen Knoten aus U enthält. Die Menge U ist dann eine **trennende Knotenmenge** (engl. *separator*) bzgl. den Mengen A und B.

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger ungerichteter Graph. Eine **Paarung** (engl. *matching*) ist eine Teilmenge $\pi \subseteq E$ für die gilt:

$$\forall \langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle \in \pi \left(\langle x, y\rangle \neq \langle x', y'\rangle \ \rightarrow \ \{x, y\} \cap \{x', y'\} = \emptyset \right)$$

Eine Paarung in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist also eine Injektion $\pi : A \to B$, wobei A und B zwei disjunkte Knotenmengen von V sind und für alle $\langle a, b\rangle \in \pi$ gilt, dass a und b adjazent sind.

THEOREM 7.10. *Sei (A, B, E) ein ungerichteter bipartiter Graph mit $|A| =: n$. Dann gilt:*

$$\max_{\pi \text{ Paarung}} |\pi| = n - \max_{X \subseteq A} \big(\underbrace{|X| - |EX|}_{\text{Defekt von } X} \big) = \min_{U \text{ trennt } A \,\&\, B} |U|$$

Beweis. $\max |\pi| \geq n - \max(|X| - |EX|)$: Wir definieren l als den maximalen Defekt, also

$$l := \max_{X \subseteq A} (|X| - |EX|).$$

Sei $X_0 \subseteq A$ mit $|X_0| - |EX_0| = l$ und sei $k := |X_0|$. Dann ist $|EX_0| = k - l$. Sei nun weiter

$$Y_0 := A \setminus X_0, \quad E' := \big\{\langle x, y\rangle \in E : x \in X_0\big\}, \quad E'' := \big\{\langle x, y\rangle \in E : x \in Y_0 \wedge y \notin EX_0\big\}.$$

1. Behauptung: $(Y_0, E''Y_0, E'')$ erfüllt die Hall'sche Bedingung.

Denn: Sei $Y \subseteq Y_0$ mit $|Y| > |E''Y|$, dann wäre $|X_0 \dot\cup Y| - |E(X_0 \dot\cup Y)| > l$, was der Definition von l widerspricht. Also existiert eine Injektion $\pi'' : Y_0 \to E''Y_0$ mit $\pi'' \subseteq E''$, insbesondere ist π'' eine Paarung.

2. Behauptung: $(EX_0, X_0, (E')^{-1})$ erfüllt die Hall'sche Bedingung.

Denn: Sei $Z \subseteq EX_0$ mit $|Z| > |\underbrace{(E')^{-1}Z}_{=:Z_0}|$, d. h. $|Z| > |Z_0|$.

Dann wäre

$$|X_0 \setminus Z_0| - |E(X_0 \setminus Z_0)| = |X_0| - |Z_0| - \big(|EX_0| - |Z|\big) = \\ \big(|X_0| - |EX_0|\big) + \big(|Z| - |Z_0|\big) > l,$$

was der Definition von l und X_0 widerspricht. Also existiert eine Injektion $\pi' : EX_0 \to X_0$ mit $\pi' \subseteq E'$, insbesondere ist π' eine Paarung.

Mit den Paarungen π'' und π' lässt sich dann die Paarung $\pi := \pi'' \cup \pi'$ konstruieren für die gilt $|\pi| = n - l$, insbesondere ist $\max |\pi| \geq n - l$.

$n - \max(|X| - |EX|) \geq \min |U|$: Seien X_0 und l wie oben und sei

$$U_0 := (A \setminus X_0) \dot\cup EX_0.$$

Dann trennt U_0 sicher A und B und es gilt

$$|U_0| = \big(n - |X_0|\big) + \big(|X_0| - l\big) = n - l.$$

$\min |U| \geq \max |\pi|$: Sei π eine Paarung und $U \subseteq A \cup B$ eine Knotenmenge die A und B trennt. Dann gilt für alle $\langle x, y\rangle \in \pi$, $\{x, y\} \cap U \neq \emptyset$ (d. h. $1 \leq |\{x, y\} \cap U| \leq 2$), und aus der Definition einer Paarung folgt $|\pi| \leq |U|$.

Wir haben somit $\max |\pi| \geq n - \max(|X| - |EX|) \geq \min |U| \geq \max |\pi|$, womit das Theorem bewiesen ist. ⊣

8. Der Verallgemeinerte Euklid'sche Algorithmus

Vom ggT zu Kettenbrüchen

Euklid gibt im zehnten Buch seiner *Elemente* einen Algorithmus an, um von *zwei gegebenen kommensurablen Grössen ihr grösstes gemeinsames Mass zu finden*. In neuerer Terminologie heisst das, von zwei gegebenen (positiven) Zahlen ihren *grösster gemeinsamer Teiler* (ggT) zu finden, wobei vorausgesetzt ist, dass solch ein gemeinsamer Teiler existiert.

Der Algorithmus wird wie folgt beschrieben:

() Die beiden Grössen seien a_0 und a_1, wobei a_0 und a_1 beide positiv sein sollen.

(a) Ist $a_0 = a_1$, so ist $a_1 = \mathrm{ggT}(a_0, a_1)$ und wir sind fertig.

(b) Sonst existiert eine grösste *natürliche Zahl* b_0, so dass gilt:

$$a_0 \geq b_0 a_1$$

b_0 ist also die kleinste natürliche Zahl für die gilt: $a_0 < (b_0 + 1) \cdot a_1$.
Beachte: Im Falle $a_0 < a_1$ ist $b_0 = 0$.

(c) Ist $a_0 = b_0 a_1$, so ist wieder $a_1 = \mathrm{ggT}(a_0, a_1)$.

(d) Ist $a_0 > b_0 a_1$, so muss gelten $a_0 - b_0 a_1 < a_1$, sonst wäre $a_0 \geq (b_0 + 1) \cdot a_1$, was der Definition von b_0 im Schritt (b) widerspricht. Weil $a_0 > b_0 a_1$ ist $a_0 - b_0 a_1 > 0$. Definieren wir nun $a_2 := a_0 - b_0 a_1$, so ist $a_0 = b_0 a_1 + a_2$ und $0 < a_2 < a_1$.

(e) Nun gehen wir mit den Zahlen a_1 und a_2 zurück zum Schritt (b) und finden eine grösste natürliche Zahl b_1, so dass $a_1 \geq b_1 a_2$.

Betrachten wir die Zahlen a_0 und a_1 als Streckenlängen (wie dies Euklid getan hat), so ist es nicht schwierig einzusehen, dass dieser Algorithmus die grösste Strecke liefert, welche in beiden Strecken enthalten ist. Mit Zahlen ausgedrückt liefert der Algorithmus also den grössten gemeinsamen Teiler der Zahlen a_0 und a_1.

Ein Vorteil des Euklid'schen Algorithmus zur Berechnung des ggT's zweier Zahlen ist, dass wir nicht zuerst die Primfaktorzerlegung der beiden Zahlen bestimmen müssen, und wir somit auch von relativ grossen Zahlen den ggT berechnen können.

Beispiel: Für $a_0 = 986$ und $a_1 = 357$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} 986 &= 2 \cdot 357 + 272 \\ 357 &= 1 \cdot 272 + 85 \\ 272 &= 3 \cdot 85 + 17 \\ 85 &= 5 \cdot 17 + 0 \end{aligned}$$

Damit ist $\mathrm{ggT}(986, 357) = 17$. Insbesondere erhalten wir $a_2 = 272$, $a_3 = 85$, $a_4 = 17$, $a_5 = 0$, und ferner ist $b_0 = 2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 5$.

Von diesem Algorithmus ist es nun ein kleiner Schritt zu den sogenannten *Kettenbrüchen*: Ein **endlicher Kettenbruch** ist ein Bruch von der Form

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}}}}$$

wobei $b_0, \ldots, b_n$ ganze Zahlen und höchstens mit Ausnahme von b_0 alle b_i positiv sind.

Wir stellen uns nun die Frage, ob sich jeder Bruch der Form $\frac{a_0}{a_1}$ als endlicher Kettenbruch schreiben lässt, und wenn ja, wie wir den entsprechenden Kettenbruch berechnen können. Um dies zu beantworten, gehen wir wie folgt vor:

Zuerst berechnen wir mit dem Euklid'schen Algorithmus den ggT von a_0 und a_1.

$$\begin{array}{rcll}
a_0 &=& b_0 \cdot a_1 + a_2 & \Rightarrow \quad \dfrac{a_0}{a_1} = b_0 + \dfrac{a_2}{a_1} = b_0 + \dfrac{1}{\frac{a_1}{a_2}} \\
a_1 &=& b_1 \cdot a_2 + a_3 & \Rightarrow \quad \dfrac{a_1}{a_2} = b_1 + \dfrac{a_3}{a_2} = b_1 + \dfrac{1}{\frac{a_2}{a_3}} \\
a_2 &=& b_2 \cdot a_3 + a_4 & \Rightarrow \quad \dfrac{a_2}{a_3} = b_2 + \dfrac{a_4}{a_3} = b_2 + \dfrac{1}{\frac{a_3}{a_4}} \\
&\vdots & & \qquad\qquad \vdots \\
a_n &=& b_n \cdot a_{n+1} + 0 & \Rightarrow \quad \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = b_n
\end{array}$$

Es gilt also

$$\frac{a_0}{a_1} = b_0 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\frac{a_3}{a_4}}}}$$

und allgemein erhalten wir

$$\frac{a_0}{a_1} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}}}}$$

Dieser letzte Ausdruck ist nun ein endlicher Kettenbruch, den wir der besseren Lesbarkeit wegen mit $[b_0, b_1, \ldots, b_n]$ bezeichnen.

Da der Bruch $\frac{a_0}{a_1}$ beliebig war, können wir also *jeden* Bruch (d. h. jede rationale Zahl) als endlichen Kettenbruch schreiben. Es gilt natürlich auch das Umgekehrte, nämlich dass jeder endliche Kettenbruch einer rationalen Zahl entspricht, denn jeder endliche Kettenbruch kann in einen normalen Bruch umgewandelt werden.

Zum Beipiel haben wir $\frac{986}{357} = [2, 1, 3, 5]$, denn:

$$\frac{986}{357} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}$$

Verwandeln wir den Kettenbruch $[2, 1, 3, 5]$ in einen normalen Bruch, so erhalten wir nicht $\frac{986}{357}$, sondern $\frac{58}{21}$, also einen gekürzten Bruch (es gilt $\frac{58}{21} = \frac{58 \cdot 17}{21 \cdot 17} = \frac{986}{357}$). Aus Proposition 8.1 und Lemma 8.2 wird folgen, dass dies immer der Fall ist, denn verwandeln wir einen Kettenbruch in einen normalen Bruch, so ist dieser Bruch *immer* gekürzt.

Wir wollen nun untersuchen, was passiert, wenn die Grössen (bzw. reellen Zahlen) a_0 und a_1 keinen gemeinsamen Teiler haben. Dafür setzen wir zum Beispiel $a_0 = \sqrt{2}$ und $a_1 = 1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \frac{\sqrt{2}}{1} & = & 1 & + & (\sqrt{2} - 1) \\
\frac{1}{\sqrt{2}-1} & = & \frac{\sqrt{2}+1}{1} & = & 2 & + & (\sqrt{2} - 1) \\
\frac{1}{\sqrt{2}-1} & = & \frac{\sqrt{2}+1}{1} & = & 2 & + & (\sqrt{2} - 1) \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Der Euklid'sche Algorithmus angewandt auf $a_0 = \sqrt{2}$ und $a_1 = 1$ bricht nie ab und liefert uns somit unendlich viele positive natürliche Zahlen b_n. Das heißt, dass der Kettenbruch von $\frac{a_0}{a_1} = \sqrt{2}$ *unendlich* ist. In unserem Fall erhalten wir den Kettenbruch

$$[1, 2, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}\,].$$

Ein **unendlicher Kettenbruch** ist ein nicht abbrechender Bruch von der Form

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

wobei $b_0, b_1, b_2 \ldots$ ganze Zahlen und höchstens mit Ausnahme von b_0 alle b_i positiv sind.

Ist $\xi \in \mathbb{R}$ eine beliebige, positive, irrationale Zahl, so können wir ξ immer als unendlichen Kettenbruch schreiben. Dazu definieren wir für positive reelle Zahlen α,

$$\lfloor \alpha \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq \alpha\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{ccccccl}
\xi & = & b_0 & + & r_1 & & \text{mit } b_0 := \lfloor \xi \rfloor \text{ und } r_1 := \xi - b_0, \text{ wobei } 0 < r_1 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_1} > 1 \\
\frac{1}{r_1} & = & b_1 & + & r_2 & & \text{mit } b_1 := \lfloor \frac{1}{r_1} \rfloor \text{ und } r_2 := \frac{1}{r_1} - b_1, \text{ wobei } 0 < r_2 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_2} > 1 \\
\frac{1}{r_2} & = & b_2 & + & r_3 & & \text{mit } b_2 := \lfloor \frac{1}{r_2} \rfloor \text{ und } r_3 := \frac{1}{r_2} - b_2, \text{ wobei } 0 < r_3 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_3} > 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

und wir erhalten den Kettenbruch $[b_0, b_1, b_2, \ldots]$.

Es stellt sich nun die Frage, wie der Kettenbruch $[b_0, b_1, b_2, \ldots]$ mit ξ zusammenhängt. Ein natürlicher Ansatz ist, den unendlichen Kettenbruch jeweils nach endlich vielen Schritten abzubrechen und die entsprechenden rationalen Zahlen zu berechnen. Wie wir zeigen werden, nähern sich diese rationalen Zahlen der irrationalen Zahl ξ an, deshalb werden sie *Näherungsbrüche* genannt. Zum Beispiel erhalten wir für den unendlichen Kettenbruch $[1, \overline{2}\,]$ die folgenden Näherungsbrüche $\frac{P_n}{Q_n}$:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{7}{5}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{17}{12}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{41}{29}, \ldots$$

Näherungsbrüche sind immer gekürzte Brüche welche, wie wir sehen werden, relativ schnell konvergieren. Wir können also zum Beispiel $\sqrt{2}$ beliebig genau berechnen. Was uns noch fehlt, ist ein einfacher Algorithmus, welcher uns erlaubt, die Näherungsbrüche ohne grossen Aufwand zu berechnen; dies liefert die folgende rekursive Formel:

$$\begin{aligned} P_{-2} &:= 0, \qquad P_{-1} := 1, \qquad P_n := b_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_{-2} &:= 1, \qquad Q_{-1} := 0, \qquad Q_n := b_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{aligned}$$

Graphisch dargestellt erhalten wir für den Kettenbruch $[1, \overline{2}\,]$ folgendes Schema:

n	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	$\ldots$
b_n			1	2	2	2	2	$\ldots$
P_n	**0**	**1**	1	3	7	17	41	$\ldots$
Q_n	**1**	**0**	1	2	5	12	29	$\ldots$

Jede Zahl der dritten Zeile entsteht, indem man die darüberstehende mit der vorausgehenden Zahl der dritten Zeile multipliziert und die nächstvorausgehende addiert; analog für die vierte Zeile.

Diesen Algorithmus zur Berechnung von Näherungsbrüchen nennen wir **verallgemeinerter Euklid'scher Algorithmus**, abgekürzt **vEA**. Wir zeigen nun, dass der vEA korrekt ist, bzw. dass die Brüche $\frac{P_n}{Q_n}$ tatsächlich Näherungsbrüche sind.

PROPOSITION 8.1. *Sei $[b_0, b_1, \ldots]$ ein unendlicher Kettenbruch. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen n:*

$$[b_0, \ldots, b_n] = \frac{P_n}{Q_n}$$

wobei die Zahlen P_n und Q_n mit dem vEA *berechnet werden.*

Beweis. Den Beweis führen wir mit Induktion nach n.

$n = 0$: Es gilt $P_0 = b_0$ und $Q_0 = 1$, also ist $\frac{P_0}{Q_0} = b_0 = [b_0]$.

Annahme: $[b_0, \ldots, b_n] = \frac{P_n}{Q_n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Wir müssen nun zeigen, dass aus der Annahme folgt: $[b_0, \ldots, b_n, b_{n+1}] = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$. So, wie die Kettenbrüche aufgebaut sind, gilt:

$$[b_0, \ldots, b_n, b_{n+1}] = [b_0, \ldots, b_n + \frac{1}{b_{n+1}}]$$

Setzen wir $b'_n := b_n + \frac{1}{b_{n+1}}$, so erhalten wir

$$[b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n + \frac{1}{b_{n+1}}] = [b_0, \ldots, b_{n-1}, b'_n]\,.$$

Wenn wir nun mit dem Algorithmus den Näherungsbruch $\frac{P'_n}{Q'_n}$ von $[b_0, \ldots, b'_n]$ berechnen, so erhalten wir $P'_n = b'_n P_{n-1} + P_{n-2}$, also

$$P'_n = \Big(b_n + \frac{1}{b_{n+1}}\Big) P_{n-1} + P_{n-2} = \quad \cdots \quad = \frac{b_{n+1}b_n P_{n-1} + P_{n-1} + b_{n+1}P_{n-2}}{b_{n+1}}\,,$$

und entsprechend

$$Q'_n = \frac{b_{n+1}b_n Q_{n-1} + Q_{n-1} + b_{n+1}Q_{n-2}}{b_{n+1}}\,.$$

Somit haben wir:

$$[b_0, \ldots, b_{n-1}, b'_n] = \frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{b_{n+1}b_n P_{n-1} + P_{n-1} + b_{n+1}P_{n-2}}{b_{n+1}b_n Q_{n-1} + Q_{n-1} + b_{n+1}Q_{n-2}}$$

Da nun

$$[b_0, \ldots, b_{n-1}, b'_n] = [b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n + \frac{1}{b_{n+1}}] = [b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}]$$

müssen wir nur noch zeigen, dass die Gleichung $\frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ gilt. Dazu schreiben wir P_{n+1} und Q_{n+1} etwas um: Mit dem Algorithmus erhalten wir $P_{n+1} = b_{n+1}P_n + P_{n-1}$, und wenn wir P_n durch $b_n P_{n-1} + P_{n-2}$ ersetzen, erhalten wir

$$P_{n+1} = b_{n+1}(b_n P_{n-1} + P_{n-2}) + P_{n-1} = b_{n+1}b_n P_{n-1} + P_{n-1} + b_{n+1}P_{n-2}\,,$$

und entsprechend

$$Q_{n+1} = b_{n+1}b_n Q_{n-1} + Q_{n-1} + b_{n+1}Q_{n-2}\,.$$

Somit ist $\frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{b_{n+1}b_n P_{n-1} + P_{n-1} + b_{n+1}P_{n-2}}{b_{n+1}b_n Q_{n-1} + Q_{n-1} + b_{n+1}Q_{n-2}} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ und der Algorithmus ist korrekt. ⊣

Bemerkung: Als Folgerung aus Proposition 8.1 erhalten wir, dass wenn $[b_0, \ldots, b_n]$ der endliche Kettenbruch von $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ist, immer $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$ gilt.

Das folgende Lemma ist wichtig, um multiplikativ Inverse in speziellen Ringen, sogenannten *euklidischen Ringen*, zu berechnen.

LEMMA 8.2. *Sind $\frac{P_n}{Q_n}$ (für $n \in \mathbb{N}$) die zum Kettenbruch $[b_0, b_1, b_2, \ldots]$ gehörenden Näherungsbrüche, so gilt für alle $n \geq -1$:*

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}$$

Beweis. Für den Beweis verwenden wir Induktion über n.
Für $n = -1$ ist $P_n = Q_{n-1} = 1$ und $P_{n-1} = Q_n = 0$, also

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}.$$

Gilt $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}$ für ein $n \geq -1$, so ist

$$P_{n+1}Q_n - P_n Q_{n+1} = (b_{n+1}P_n + P_{n-1})Q_n - P_n(b_{n+1}Q_n + Q_{n-1}) = \\ P_{n-1}Q_n - P_n Q_{n-1} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ⊣

Bemerkung: Als Folgerung aus Lemma 8.2 erhalten wir, dass die Näherungsbrüche $\frac{P_n}{Q_n}$ immer gekürzt sind. Denn wäre $\mathrm{ggT}(P_n, Q_n) = d > 1$, so hätten wir $d \mid (qP_n - p\,Q_n)$ (für alle $p, q \in \mathbb{Z}$), und somit $|qP_n - p\,Q_n| \neq 1$.

EINDEUTIGKEIT DER PRIMFAKTORZERLEGUNG

Als Anwendung des vEA zeigen wir die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen $n \geq 2$. Dazu beweisen wir zuerst folgendes Hilfsresultat:

LEMMA 8.3. *Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ positive Zahlen mit $a \mid bc$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Dann gilt $a \mid c$.*

Beweis. Sei $[b_0, \ldots, b_n]$ der Kettenbruch von $\frac{a}{b}$. Ist $n = 0$, so ist $b = 1$ und $a \mid c$. Ist $n > 1$, so ist, weil $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, $P_n = a$ und $Q_n = b$, und mit Lemma 8.2 gilt $a \cdot Q_{n-1} - b \cdot P_{n-1} = (-1)^{n-1}$. Somit existieren $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $|k| = Q_{n-1}$ und $|l| = P_{n-1}$ sodass gilt $ak + bl = 1$. Weil $a \mid bc$ existiert ein $s \in \mathbb{N}$ mit $as = bc$. Nun ist

$$c = c \cdot 1 = c \cdot (ak + bl) = ack + bcl = ack + asl = a \cdot \underbrace{(ck + sl)}_{=:t} = a \cdot t$$

und wir erhalten $a \mid c$. ⊣

Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, ist eine **Primzahl**, wenn aus $n \mid p$ folgt $n = 1$ oder $n = p$. Mit Induktion über $m \in \mathbb{N}$ lässt sich einfach zeigen, dass sich jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$ als Produkt von Primzahlen schreiben lässt. Der folgende Satz besagt, dass dieses Produkt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig ist.

THEOREM 8.4. *Für positive Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ seien*

$$a = \prod_{i \in n} p_i \quad \text{und} \quad b = \prod_{j \in m} q_j$$

wobei die p_i und q_j Primzahlen sind. Ist $a = b$, so ist $n = m$ und es existiert eine Bijektion $\pi : n \to m$ mit $p_i = q_{\pi(i)}$ für alle $i \in n$.

Beweis. Beweis mit Induktion nach n: Ist $n = 1$, so ist $a = p_0$ und $b = q_0$ und aus $a = b$ folgt $p_0 = q_0$. Sei $n > 1$ und sei der Satz bewiesen für $n - 1$. Für $n > 1$ gilt $p_0 \mid a$ und aus $a = b$ folgt somit $p_0 \mid b$ also

$$p_0 \mid q_0 \cdot \prod_{j \in m-1} q_{j+1}.$$

Gilt $p_0 \mid q_0$, so erhalten wir, weil p_0 und q_0 prim sind, $p_0 = q_0$ und wir können die Induktionsvoraussetzung anwenden auf

$$\prod_{i \in n-1} p_{i+1} = \prod_{j \in m-1} q_{j+1}.$$

Gilt $p_0 \nmid q_0$, so erhalten wir mit Lemma 8.3

$$p_0 \mid q_1 \cdot \prod_{j \in m \setminus 2} q_j.$$

Gilt $p_0 \mid q_1$, so ist $p_0 = q_1$, andernfalls wenden wir wieder Lemma 8.3 an. So fortgefahren, finden wir schliesslich ein $j_0 \in m$ für das gilt $p_0 = q_{j_0}$ und wir können die Induktionsvoraussetzung anwenden auf

$$\prod_{i \in n-1} p_{i+1} = \prod_{j \in m \setminus \{j_0\}} q_j.$$

⊣

Als Folgerung aus Theorem 8.4 erhalten wir nun leicht

KOROLLAR 8.5. *Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich, bis auf Vertauschung der Faktoren, eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben.*

BEMERKUNGEN ZU UNENDLICHEN KETTENBRÜCHEN*

Bis jetzt haben wir noch nicht gezeigt, dass die Näherungsbrüche des unendlichen Kettenbruchs einer irrationalen Zahl ξ tatsächlich gegen die Zahl ξ konvergieren. Das hohlen wir nun nach.

THEOREM 8.6. *Sei ξ eine irrationale Zahl, sei $[b_0, b_1, b_2, \ldots]$ der unendliche Kettenbruch von ξ und seien $\frac{P_n}{Q_n}$ (für $n \in \mathbb{N}$) die zum Kettenbruch gehörenden Näherungsbrüche. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \xi$$

Beweis. Aus der Konstruktion des Kettenbruchs von ξ folgt für $\xi_n := \frac{1}{r_n}$:

$$\xi = [b_0, \xi_1] = [b_0, b_1, \xi_2] = [b_0, b_1, b_2, \xi_3] = \ldots = [b_0, b_1, \ldots, b_n, \xi_{n+1}] = \ldots$$

und ebenso gilt für $1 \leq m \leq n$:

$$\xi_m = [b_m, \ldots, b_n, \xi_{n+1}]$$

Mit Proposition 8.1 erhalten wir

$$\xi = \frac{P_n\xi_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n\xi_{n+1} + Q_{n-1}}$$

woraus mit Lemma 8.2 folgt:

$$\xi - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1}}{Q_n(Q_n\xi_{n+1} + Q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_n\xi_{n+1} + Q_{n-1})}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Konstruktion $Q_n \geq n$ und $\xi_{n+1} > 1$, und somit erhalten wir

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ⊣

Als Anwendung der Intervallschachtelung (Theorem 4.3) zeigen wir, dass die Näherungsbrüche von Kettenbrüchen immer konvergieren. Für endliche Kettenbrüche ist das klar, und somit genügt es, nur unendliche Kettenbrüche zu betrachten.

PROPOSITION 8.7. *Ist $[b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots]$ ein unendlicher Kettenbruch und sind $\frac{P_n}{Q_n}$ die unendlich vielen Näherungsbrüche dieses Kettenbruchs, so existiert genau eine reelle Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ mit*

$$\xi = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$I_n := \left[\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}\right]$$

und zeigen, dass die Folge (I_n) eine Intervallschachtelung ist. Dafür müssen wir folgendes zeigen:

(a) $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$ (d.h. die Invervalle sind nicht leer)

(b) $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}$ und $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} > \frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}}$ (d. h. $I_n \supseteq I_{n+1}$)

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}-\dfrac{P_{2n}}{Q_{2n}}\right)=0$

Nach Definition sind $b_0, b_1, \ldots$ ganze Zahlen und höchstens mit Ausnahme von b_0 sind alle b_i positiv. Weiter gilt mit Proposition 8.1: $Q_0 = 1$, $Q_1 = b_1$, und für $n \geq 2$ gilt $Q_n = b_nQ_{n-1} + Q_{n-2}$. Weil b_n für $n \geq 1$ positiv ist und $Q_0 = 1$, erhalten wir $Q_{n+2} = b_{n+2}Q_{n+1} + Q_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere ist $Q_n - Q_{n-1} \geq 1$. Mit Lemma 8.2 wissen wir auch, dass für alle $n > 1$ gilt $P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}$.

(a) Es gilt

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} \iff P_{2n+1}Q_{2n} - P_{2n}Q_{2n+1} > 0$$

und mit $P_{2n+1}Q_{2n} - P_{2n}Q_{2n+1} = (-1)^{2n} = 1$ folgt (a).

(b) Weiter gilt

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} \iff P_{2n+2}Q_{2n} - P_{2n}Q_{2n+2} > 0$$

und weil $P_{2n+2} = b_{2n+2}P_{2n+1} + P_{2n}$ und $Q_{2n+2} = b_{2n+2}Q_{2n+1} + Q_{2n}$ erhalten wir

$$P_{2n+2}Q_{2n} - P_{2n}Q_{2n+2} = b_{2n+2}\big(P_{2n+1}Q_{2n} - P_{2n}Q_{2n+1}\big) = b_{2n+2}(-1)^{2n} = 1.$$

Analog zeigen wir $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} > \frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}}$, woraus (b) folgt.

(c) Mit Lemma 8.2 erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right| = \frac{1}{Q_nQ_{n-1}} \leq \frac{Q_n - Q_{n-1}}{Q_nQ_{n-1}} = \frac{1}{Q_{n-1}} - \frac{1}{Q_n}.$$

Für $n \geq 2$ und $k \geq 1$ erhalten wie hieraus:

$$\begin{aligned}\left|\frac{P_{n+k}}{Q_{n+k}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| &= \left|\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{P_{n+l+1}}{Q_{n+l+1}} - \frac{P_{n+l}}{Q_{n+l}}\right)\right| \leq \sum_{l=0}^{k-1}\left|\frac{P_{n+l+1}}{Q_{n+l+1}} - \frac{P_{n+l}}{Q_{n+l}}\right| \\ &\leq \sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{1}{Q_{n+l}} - \frac{1}{Q_{n+l+1}}\right) = \frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_{n+k}} < \frac{1}{Q_n} \leq \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Daraus schliessen wir

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}\right) = 0$$

womit auch (c) gezeigt ist. ⊣

Interessant sind auch die unendlichen Kettenbrüche von Wurzeln natürlicher Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Diese Kettenbrüche sind immer von der Form

$$\sqrt{n} = [b_0, \overline{b_1, \ldots, b_k, 2b_0}]$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ und $b_0 = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ und für alle i mit $1 \leq i \leq k$ gilt $b_i = b_{k-i}$.

Ist $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, so bilden Zähler und Nenner gewisser Näherungsbrüchen von $\sqrt{n}$ alle ganzzahligen Lösungen von sogenannten *Pell'schen Gleichungen* der Form

$$x^2 - n \cdot y^2 = 1.$$

Zum Beispiel ist $\sqrt{19} = [4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$, d. h. $k = 5$, und $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{170}{39}$ mit $170^2 - 19 \cdot 39^2 = 1$, was die kleinste positive Lösung von $x^2 - 19 \cdot y^2 = 1$ ist. Die nächst grössere Lösung erhalten wir mit dem $(2k+1)$-ten Näherungsbruch: $\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} = \frac{57\,799}{13\,260}$ und es gilt $57\,799^2 - 19 \cdot 13\,260^2 = 1$.

9. Grundbegriffe der Gruppentheorie

Eine Gruppe ist ein Modell der Gruppenaxiome GT, also eine $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}}$-Struktur mit Bereich G, wobei $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}} = \{\mathsf{e}, \circ\}$. Wie üblich identifizieren wir eine Gruppe $(G, e, \circ)$ mit ihrem Bereich G, oder wir schreiben $(G, \circ)$, um auch die binäre Operation $\circ$ hervorzuheben. Wenn wir keine Operation explizit definiert, betrachten wir die Gruppe als *multiplikative Gruppe*, wobei wir den Multiplikationspunkt "$\cdot$" meist weglassen. Bevor wir die Struktur von Gruppen untersuchen, beweisen wir ein paar unmittelbare Folgerungen aus den Axiomen.

Einfache Folgerungen aus den Gruppenaxiomen

Proposition 9.1. *Sei G eine Gruppe mit Links-Neutralelement e. Dann gilt:*

(a) Links-Inverse Elemente sind auch rechtsinvers.

(b) e ist auch Rechts-Neutralelement.

(c) G hat genau ein Neutralelement (links und rechts).

(d) Jedes Element aus G hat genau ein Inverses (links und rechts).

Beweis. (a) Sei $a \in G$ beliebig und sei $\bar{\bar{a}}$ ein Links-Inverses von $\bar{a}$, wobei $\bar{a}$ ein Links-Inverses von a ist. Es gilt:

$$a\bar{a} \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ linksneutral}}}{=} e(a\bar{a}) = (\bar{\bar{a}}\bar{a})(a\bar{a}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mit Assoziativität}}}{=} \bar{\bar{a}}(\bar{a}a)\bar{a} \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{a}a = e}}{=} \bar{\bar{a}}(e\bar{a}) \underset{\substack{\uparrow \\ e\bar{a}=\bar{a}}}{=} \bar{\bar{a}}\bar{a} = e\,.$$

Somit ist $a\bar{a} = \bar{a}a = e$, was zeigt, dass das Links-Inverse $\bar{a}$ von a auch rechtsinvers ist. Weil jedes Element $a \in G$ mit GT_2 ein Links-Inverses hat, hat a auch ein Rechts-Inverses. Das Element $\bar{a}$ ist also ein *Inverses* von a.

(b) Es gilt

$$ae = a(\bar{a}a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mit Assoziativität}}}{=} (a\bar{a})a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mit (a)}}}{=} ea \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ linksneutral}}}{=} a$$

Weil $a \in G$ beliebig war, ist e auch ein Rechts-Neutralelement. Das Element e ist also ein *Neutralelement* von G.

(c) Seien $e, \tilde{e} \in G$ Neutralelemente von G. Somit gilt für alle $x \in G$, $x\tilde{e} = ex = x$. Insbesondere gilt:

$$e \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{e} \text{ neutral}}}{=} e\tilde{e} \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ neutral}}}{=} \tilde{e}$$

Somit ist $e = \tilde{e}$ und es gibt genau ein Neutralelement in G.

(d) Sei $a \in G$ beliebig und seien $x, \tilde{x} \in G$ so, dass $xa = \tilde{x}a = e$, wobei $e \in G$ das Neutralelement von G ist. Mit (a) gilt $xa = ax = e$ und wir erhalten:

$$\tilde{x} \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ neutral}}}{=} \tilde{x}e = \tilde{x}(ax) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mit Assoziativität}}}{=} (\tilde{x}a)x = ex \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ neutral}}}{=} x$$

Somit ist $\tilde{x} = x$ und a hat genau ein Inverses in G. Weil a beliebig war, hat jedes Element aus G genau ein Inverses. ⊣

Ist die Operation $\circ$ einer Gruppe kommutativ, so heisst die Gruppe **abelsch**.

Faktum 9.2. *Sei G eine Gruppe mit Neutralelement e. Ist $aa = e$ für alle Elemente $a \in G$, so ist G abelsch.*

Beweis. Seien $a, b \in G$ beliebig. Aus

$$(ba)(ab) = beb = bb = e$$

folgt $(ba) = (ab)^{-1}$, wobei $(ab)^{-1}$ das Inverse von ab ist.

Andererseit gilt nach Voraussetzung $(ab)(ab) = e$. Somit ist $(ab) = (ab)^{-1}$ und aus der Eindeutigkeit des Inversen folgt $ba = ab$. Weil a, b beliebig waren ist G abelsch. ⊣

UNTERGRUPPEN

Sei G eine Gruppe. Eine nicht-leere Menge $H \subseteq G$ ist eine **Untergruppe** von G, falls für alle $x, y \in H$ gilt $x\,y^{-1} \in H$.

Ist H eine Untergruppe von G, dann schreiben wir $H \leqslant G$.

PROPOSITION 9.3. *Ist $H \leqslant G$, dann ist H eine Gruppe.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass H die Axiome GT erfüllt.

- GT_1: Sei $x \in H$. Dann ist, nach Definition, $xx^{-1} = e \in H$, und somit ist das Neutralelement e von G in H.
- GT_2: Sei $x \in H$. Dann ist, nach Definition, $ex^{-1} = x^{-1} \in H$.
- GT_0: Seien $x, y \in H$. Dann ist auch $y^{-1} \in H$, und nach Definition ist $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H$. Damit ist H abgeschlossen unter der assoziativen Operation auf G. ⊣

Ist G eine Gruppe, so sind $\{e\}$ und G die sogenannten **trivialen Untergruppen** von G.

PROPOSITION 9.4. *Der Durchschnitt beliebig vieler Untergruppen einer Gruppe G ist wieder eine Untergruppe von G.*

Beweis. Sei Λ irgend eine Menge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $H_\lambda \leqslant G$. Sei

$$H_0 = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$$

und seien $x, y \in H_0$ beliebig. Dann sind x, y in allen H_λ, und mit $H_\lambda \leqslant G$ gilt für jedes $\lambda \in \Lambda$, $x\,y^{-1} \in H_\lambda$. Somit sind $x\,y^{-1} \in H_0$. Weil $x, y \in H_0$ beliebig waren ist $H_0 \leqslant G$. ⊣

Sei G eine Gruppe. Die Kardinalität $|G|$ der Menge G ist die **Ordnung** der Gruppe G. Sei e das Neutralelement von G und sei $x \in G$. Die kleinste positive Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $x^n = e$ (sofern sie existiert), ist die **Ordnung von x**, bezeichnet mit $\mathrm{ord}(x)$ – wobei wir die Notation

$$x^n := \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}$$

benutzen. Falls es keine solche Zahl gibt, sei $\mathrm{ord}(x) := \infty$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x^n \neq e$.

Die Ordnung eines Elements $x \in G$ einer endlichen Gruppe G ist immer endlich: Weil die Menge $\{x^1, x^2, x^3, \ldots\} \subseteq G$ endlich ist, existieren $0 < n < m$ mit $x^n = x^m = x^n\,x^{m-n}$ und es folgt $e = x^{m-n}$ mit $m - n > 0$.

Ist $\mathrm{ord}(x) = n$, so ist $|\{x^1, \ldots, x^n\}| = n$, denn sonst finden wir $1 \leq k < l \leq n$ mit $x^k = x^l$, also $x^{l-k} = e$ mit $l - k < n$.

Sei $x \in G$ mit $\mathrm{ord}(x) = n$. Setzen wir $x^0 := e$, so ist $\{x^k : k \in n\}$ eine Untergruppe von G, denn für $l_1, l_2 \in n$ ist $x^{l_1} \cdot x^{l_2} = x^{l_1+l_2} = x^k$ für ein $k \in n$ und $x^l \cdot x^{n-l} = e$. Zudem ist $\{x^k : k \in n\}$ die kleinste Untergruppe $H \leqslant G$, die x enthält. Denn mit $x \in H$ ist auch jede Potenz von x in H. Somit enthält jede Untergruppe $H \leqslant G$ die x enthält immer auch die Gruppe $\{x^k : k \in n\}$.

Für eine Gruppe G und eine Menge $X \subseteq G$ sei die von X **erzeugte Untergruppe** definiert als

$$\langle X \rangle := \bigcap_{\substack{H \leqslant G \\ X \subseteq H}} H \,.$$

Aus Proposition 9.4 folgt, dass $\langle X \rangle$ eine Untergruppe von G ist. Diese Untergruppe ist die kleinste Gruppe, welche durch X **erzeugt** (oder **generiert**) wird. Ist $X = \{x\}$, dann schreiben wir $\langle x \rangle$ anstelle von $\langle \{x\} \rangle$ und nennen x einen **Generator** der Gruppe $\langle x \rangle$.

Für $x \in G$ ist $\langle x \rangle$ die kleinste Untergruppe von G die x enthält. Ist also $x \in G$ mit $\operatorname{ord}(x) = n$, so gilt $\langle x \rangle = \{x^k : k \in n\}$.

Zyklische Gruppen

Eine endliche Gruppe G mit $|G| = n$ ist **zyklisch**, wenn ein Element $g \in G$ existiert, sodass $G = \{g^k : k \in n\}$, insbesondere gilt $G = \langle g \rangle$ und g ist ein **Generator** der Gruppe G. Das folgende Faktum ist eine Umformulierung der Definition.

Faktum 9.5. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann zyklisch, wenn in G ein Element g existiert mit $\operatorname{ord}(g) = |G|$.*

Beachte, dass aus $x^n \cdot x^m = x^{n+m} = x^m \cdot x^n$ (für alle $n, m \in \mathbb{N}$) folgt, dass zyklische Gruppen immer abelsch sind.

Faktum 9.6. *Ist G eine Gruppe und $x \in G$ mit $\operatorname{ord}(x) = n$, dann ist $\langle x \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n, d. h. $|\langle x \rangle| = n$.*

Beweis. Die Gruppe $\langle x \rangle$ besteht aus den Elementen $x^1, x^2, \ldots, x^n$, wobei $x^n = e$. Andererseits ist $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n. ⊣

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

Korollar 9.7. *Sei G eine Gruppe. Ist $x \in G$ ein Element von endlicher Ordnung, dann ist $\langle x \rangle \leqslant G$ und $\operatorname{ord}(x) = |\langle x \rangle|$.*

Produkte von Gruppen

Proposition 9.8. *Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \bullet, e_H)$ zwei beliebige Gruppen. Dann ist*

$$\big(G \times H, *, \langle e_G, e_H \rangle\big)$$

mit

$$\langle g_1, h_1 \rangle * \langle g_2, h_2 \rangle := \langle g_1 \circ g_2, h_1 \bullet h_2 \rangle$$

eine Gruppe.

Beweis. Da die Verknüpfung $*$ komponentenweise definiert ist, ist $*$ eine Operation auf $G \times H$ Da die Operationen $\circ$ und $\bullet$ assoziativ sind, ist auch die Operation $*$ assoziativ. Weiter ist $\langle e_G, e_H \rangle$ das Neutralelement und $\langle g^{-1}, h^{-1} \rangle$ ist das Inverse von $\langle g, h \rangle$. ⊣

Zwei Gruppen $(G_0, \circ)$ und $(G_1, \bullet)$ sind **isomorph**, bezeichnet mit $G_0 \cong G_1$, falls eine Bijektion $\alpha : G \to H$ existiert, sodass für alle $x, y \in G$ gilt: $\alpha(x \circ y) = \alpha(x) \bullet \alpha(y)$. Beachte, dass bei einem Isomorphismus $\alpha : G_0 \to G_1$, das Neutralelemt von G_0 auf das Neutralelement von G_1 abgebildet wird, und das Inverse von x auf das Inverse von $\alpha(x)$ abgebildet wird, d. h. $\alpha(x^{-1}) = \alpha(x)^{-1}$.

FAKTUM 9.9. *$G \times \{e_H\} \leqslant G \times H$ und $G \cong G \times \{e_H\}$.*

Beweis. Da $\{e\}$ eine Untergruppe von H ist, ist $G \times \{e_H\}$ eine Untergruppe von $G \times H$. Die Einbettung $\alpha\colon G \to G \times \{e_H\}$ mit $x \mapsto \alpha(x) := \langle x, e_H\rangle$ ist ein Isomorphismus. ⊣

NEBENKLASSEN

Für $H \leqslant G$ und $x \in G$ seien

$$xH := \{xh : h \in H\} \quad \text{und} \quad Hx := \{hx : h \in H\}\,.$$

Die Mengen $xH, Hx \subseteq G$ heissen **Linksnebenklassen** bzw. **Rechtsnebenklassen** von H in G.

Das folgende Lemma ist eine Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften von Nebenklassen:

LEMMA 9.10 (links-Version). *Sei G eine Gruppe, $H \leqslant G$ und seien $x, y \in G$ beliebig.*

(a) $|xH| = |H|$, *d. h. es existiert eine Bijektion zwischen H und xH.*
(b) $x \in xH$.
(c) $xH = H$ *genau dann, wenn* $x \in H$.
(d) $xH = yH$ *genau dann, wenn* $x^{-1}y \in H$.
(e) $xH = \{g \in G : gH = xH\}$.

Beweis. (a) Definiere die Abbildung $\varphi_x : H \to xH$ durch $\varphi_x(h) := xh$. Wir müssen zeigen, dass φ_x eine Bijektion ist: Ist $\varphi_x(h_1) = \varphi_x(h_2)$ für $h_1, h_2 \in H$, d. h. $xh_1 = xh_2$, dann ist $xh_1{h_2}^{-1} = xh_2{h_2}^{-1} = xe = x$, woraus $h_1{h_2}^{-1} = e$ folgt, also $h_1 = h_2$. Somit ist die Abbildung φ_x injektiv.

Andererseits ist jedes Element in xH von der Form xh (für ein $h \in H$), und weil gilt $xh = \varphi_x(h)$, ist die Abbildung φ_x auch surjektiv. Somit ist φ_x eine Bijektion zwischen H und xH.

(b) Weil $e \in H$, ist $xe = x \in xH$.

(c) Ist $xH = H$, dann gilt, weil $e \in H$, $xe = x \in H$. Für die andere Richtung nehmen wir an $x \in H$ (also auch $x^{-1} \in H$): Weil H eine Gruppe ist, haben wir $xH \subseteq H$.

Sei nun $h \in H$ irgend ein Element aus H. Weil $x^{-1} \in H$, ist $x^{-1}h \in H$ und somit gilt $xH \ni x(x^{-1}h) = h$. Weil $h \in H$ beliebig war, erhalten wir $xH \supseteq H$. Damit gilt $xH \subseteq H \subseteq xH$, woraus die Gleichheit $xH = H$ folgt.

(d) Ist $xH = yH$, dann gilt

$$H = eH = (x^{-1}x)H = x^{-1}(xH) = x^{-1}(yH) = (x^{-1}y)H \overset{\text{mit (c)}}{\Longrightarrow} x^{-1}y \in H\,.$$

Ist $x^{-1}y \in H$, dann folgt aus (c), dass gilt $(x^{-1}y)H = H$, und somit ist

$$xH = x(x^{-1}y)H = (xx^{-1})yH = yH.$$

(e) Ist $g \in xH$, dann ist $g = xh$ für ein $h \in H$. Somit ist $gH = xhH = xH$, woraus folgt, dass gilt $xH \subseteq \{g \in G : gH = xH\}$.

Gilt umgekehrt $xH = gH$ für ein $g \in G$, dann folgt aus (b), $g \in xH$. Somit haben wir $\{g \in G : gH = xH\} \subseteq xH$, womit auch (e) bewiesen ist. ⊣

Es gibt natürlich auch eine rechts-Version von Lemma 9.10, welche analog bewisen wird. Als Folgerung aus Lemma 9.10.(b), sowie dessen rechts-Version, erhalten wir:

KOROLLAR 9.11. *Sei $H \leqslant G$, dann gilt*

$$\bigcup_{x \in G} xH = G = \bigcup_{x \in G} Hx\,.$$

Das folgende Lemma ist eine Folgerung aus Lemma 9.10 (e):

LEMMA 9.12 (links-Version). *Sei $H \leqslant G$. Dann gilt für alle $x, y \in G$ entweder $xH = yH$ oder $xH \cap yH = \emptyset$.*

Beweis. Entweder ist $xH \cap yH = \emptyset$ (und wir sind fertig), oder es gibt ein $z \in xH \cap yH$. Es gilt nun:

$$\left.\begin{array}{l} z \in xH \overset{\text{mit (e)}}{\Rightarrow} zH = xH \\ z \in yH \overset{\text{mit (e)}}{\Rightarrow} zH = yH \end{array}\right\} \Rightarrow xH = yH$$

⊣

Auch für dieses Lemma gibt es analog wieder eine Version für Rechtsnebenklassen.

Sei G eine Gruppe und $H \leqslant G$ eine Untergruppe. Dann definieren wir

$$G/H := \{xH : x \in G\} \quad \text{und} \quad H\backslash G := \{Hx : x \in G\}\,.$$

Eine **Partition** einer Menge S ist eine Menge von paarweise disjunkten nicht-leeren Teilmengen von S, sodass die Vereinigung dieser Mengen S ist.

Als eine unmittelbare Folgerung von Lemma 9.10.(a), Korollar 9.11 und Lemma 9.12 (links- und rechts-Versions) erhalten wir:

KOROLLAR 9.13. *Sei $H \leqslant G$, dann ist sowohl G/H wie auch $H\backslash G$ eine Partition von G, wobei jeder Teil dieser Partitionen dieselbe Kardinalität hat wie H.*

Sei $H \leqslant G$. Dann ist $|G/H| = |H\backslash G|$ der **Index** von H in G, bezeichnet mit $[G : H]$.

Als Folgerung aus Korollar 9.13 erhalten wir:

KOROLLAR 9.14. *Sei G eine Gruppe und sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe von G. Ist $[G : H] = 2$, dann gilt für alle $x \in G$, $xH = Hx$.*

Beweis. Ist $x \in H$, dann gilt, weil H eine Gruppe ist, $xH = Hx = H$. Sei nun $x \in G$ mit $x \notin H$. Mit Korollar 9.13 haben wir $G = H \cup xH$ und $G = H \cup Hx$, wobei $H \cap xH = \emptyset = H \cap Hx$, woraus die Gleichheit $xH = Hx$ folgt. ⊣

Ist $H \leqslant G$ und gilt $xH = H = Hx$ für alle $x \in G$, so ist $H = xHx^{-1}$ für alle $x \in G$. Untergruppen $H \leqslant G$, für die gilt $H = xHx^{-1}$ für alle $x \in G$, heissen **Normalteiler** von G, bezeichnet mit $H \trianglelefteq G$. Jede Gruppe G besitzt die trivialen Normalteiler $\{e\}$ und G. Mit Korollar 9.14 ist aber auch jede Untergruppe $H \leqslant G$ mit Index 2 ein Normalteiler von G, und ist G eine abelsche Gruppe, so ist jede Untergruppe $H \leqslant G$ ein Normalteiler von G, denn für alle $x \in G$ gilt $xH = Hx$.

DER SATZ VON LAGRANGE

Der folgende Satz spielt eine wichtige Rolle, um die Struktur von endlichen Gruppen zu untersuchen.

SATZ VON LAGRANGE. *Sei G eine (endliche oder unendliche) Gruppe und sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe von G. Dann gilt*

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

Insbesondere gilt für endliche Gruppen G, dass die Ordnung von H die Ordnung von G teilt.

Beweis. Betrachte die Partition G/H von G. Diese Partition hat $[G : H]$ Teile und jeder Teil hat $|H|$ Elemente (mit Lemma 9.10.(a)). Somit gilt $|G| = [G : H] \cdot |H|$. Ist nun G eine endliche Gruppe, d. h. $|G| = n$ für ein positives $n \in \mathbb{N}$, so ist $|H| \cdot [G : H] = n$, woraus folgt, dass $|H|$ ein Teiler von n ist. ⊣

Als Folgerung aus dem Satz von Lagrange erhalten wir:

KOROLLAR 9.15. *Ist G eine endliche Gruppe, dann gilt für alle $x \in G$,*

$$x^{|G|} = e.$$

Beweis. Für jedes $x \in G$ ist $\langle x \rangle$ eine endliche Untergruppe von G. Mit dem Satz von Lagrange gilt nun, dass $|\langle x \rangle|$ die Gruppenordnung $|G|$ teilt. Weil nun $|\langle x \rangle| = \operatorname{ord}(x)$, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ord}(x) \cdot k = |G|$. Somit ist, weil $x^{\operatorname{ord}(x)} = e$,

$$x^{|G|} = x^{\operatorname{ord}(x) \cdot k} = \left(x^{\operatorname{ord}(x)}\right)^k = e^k = e.$$

⊣

BEMERKUNGEN ZU NORMALTEILERN*

Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler der Gruppe G, d. h. N ist eine Untergruppe von G und für alle $x \in G$ gilt $xN = Nx$ bzw. $xNx^{-1} = N$. Dann können wir auf der Menge G/N der Linksnebenklassen von N eine Gruppenstruktur wie folgt definieren: Für $x, y \in G/N$ ist

$$(xN)(yN) = x(\underbrace{yNy^{-1}}_{=N})(yN) = (xy)N(yy^{-1})N = (xy)N(\underbrace{eN}_{=N}) = (xy)(\underbrace{NN}_{=N}) = (xy)N$$

und wir definieren die Gruppenoperation auf G/N durch

$$(xN)(yN) := (xy)N.$$

Wir müssen nun natürlich zeigen, dass diese Operation wohldefiniert ist und dass G/N mit dieser Operation tatsächlich eine Gruppe ist, nämlich die sogenannte **Faktorgruppe** von G nach N.

Beachte, dass aus $K \trianglelefteq N \trianglelefteq G$ im Allgemeinen nicht folgt, dass K ein Normalteiler von G ist. Andererseits folgt aber zum Beispiel aus $K \leqslant H \leqslant G$ und $K \trianglelefteq G$, dass K ein Normalteiler von H ist.

10. MODULORECHNEN

In diesem Kapitel sind Ringe immer kommutative Ringe mit 1. Erinnerung: Ein kommutativer Ring mit 1 ist ein Modell der Ringaxiome $\mathsf{RT}_0 - \mathsf{RT}_8$, also eine $\mathscr{L}_{\mathsf{RT}}$-Struktur mit Bereich R, wobei $\mathscr{L}_{\mathsf{RT}} = \{0, 1, +, \cdot\}$. Wie üblich identifizieren wir einen Ring $(R, 0, 1, +, \cdot)$ mit seinem Bereich R, oder wir schreiben $(R, +, \cdot)$ um auch die binären Operationen hervorzuheben.

IDEALE

Sei $(R, 0, 1, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Eine Menge $I \subseteq R$ ist ein **Ideal** in R, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(I_0) $I \neq \emptyset$
(I_1) $\forall a, b \in I\,(a + b \in I)$
(I_2) $\forall x \in R \forall a \in I\,(x \cdot a \in I)$

Da mit $1 \in R$ auch $-1 \in R$ ist, folgt aus (I_2), dass mit jedem $a \in I$ auch $(-1) \cdot a = -a$ in I ist. Mit (I_0) und (I_1) ist das Ideal also eine additive Untergruppe von R, d. h. eine Untergruppe der abelschen Gruppe $(R, 0, +)$. Ist $1 \in I$, so ist $I = R$ (also ein Ring), ist aber $1 \notin I$ und $I \neq \{0\}$, so ist I kein Unterring von R (nicht-triviale Unterringe von R müssen die 1 enthalten). Beachte, dass $\{0\}$ ein Ring mit 1 ist – in $\{0\}$ gilt $0 = 1$.

Jeder Ring R besitzt die beiden *trivialen* Ideale R und $\{0\}$; das Ideal $\{0\}$ heisst **Nullideal**. Wie wir später sehen werden, sind Körper dadurch charakterisiert, dass sie nur die trivialen Ideale enthalten.

Beispiele: (a) Für $m \in \mathbb{Z}$ sei

$$m\mathbb{Z} := \{x \cdot m : x \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann ist $m\mathbb{Z}$ ein Ideal im Ring $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$. Denn mit $xm \in m\mathbb{Z}$ ist auch $y \cdot (xm) = (yx) \cdot m \in I$, und mit $xm, ym \in I$ ist auch $xm + ym = (x + y)m \in I$.

(b) Sei $\mathbb{Z}[X]$ der Ring der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ (siehe Aufgabe 11), und sei $f \in \mathbb{Z}[X]$, zum Beispiel $f = 1 - X^2 + 7X^3$. Dann ist

$$(f) := \big\{g \cdot f : g \in \mathbb{Z}[X]\big\}$$

ein Ideal in $\mathbb{Z}[X]$: Nach Definition sind (I_0) und (I_2) erfüllt, und weil $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[X]$, ist mit ($\mathrm{I}_2$) auch ($\mathrm{I}_1$) erfüllt.

Für Beispiel (a) gilt auch eine Art Umkehrung.

PROPOSITION 10.1. *Ist $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein Ideal, dann existiert ein $m \in \mathbb{Z}$, sodass gilt:*

$$I = m\mathbb{Z}$$

Beweis. Ist I das Nullideal, so ist $I = 0\mathbb{Z}$ und wir sind fertig. Ist $I \neq \{0\}$, so enthält I mit (I_2) positive Zahlen. Sei

$$m := \min\big\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : n \in I\big\}.$$

Wir zeigen $I = m\mathbb{Z}$. Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass ein $a \in I$ existiert mit $a \notin m\mathbb{Z}$. Wir dürfen annehmen, dass $a > 0$, denn mit $a \in I$ ist immer auch $-a \in I$. Nach Definition von m ist $m < a$. Sei $d := \mathrm{ggT}(a, m)$. Dann ist $1 \leq d < m$, weil $a \notin m\mathbb{Z}$. Mit dem vEA finden wir $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $ka + lm = d$. Aus (I_2) folgt, dass sowohl ka wie auch lm in I sind, und mit (I_1) ist somit auch $ka + lm$, also $d < m$ in I, was aber der Definition von m widerspricht. ⊣

FAKTORRINGE

Sei R ein kommutativer Ring und sei $I \subseteq R$ ein Ideal, zum Beispiel $R = \mathbb{Z}$ und $I = m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Für $x \in R$ definieren wir die sogenannte **Restklasse** von x durch

$$\bar{x} := x + I = \{x + a : a \in I\}.$$

Weiter definieren wir auf R die binäre Relation "$\sim$" durch:

$$x \sim y \iff \bar{x} = \bar{y}$$

Weil "$=$" eine Äquivalenzrelation ist, ist auch "$\sim$" eine Äquivalenzrelation. Gilt $x \sim y$, so sagen wir "x ist kongruent y modulo I" und schreiben

$$x \equiv y \pmod{I}.$$

Sei $R/I := \{\bar{x} : x \in R\}$ (gesprochen "R *modulo* I") die Menge der Äquivalenzklassen. Auf R/I definieren wir die beiden binären Operationen $\oplus$ und $\otimes$ auf Repräsentanten von Äquivalenzklassen wie folgt:

$$\bar{x} \oplus \bar{y} := \overline{x + y} \qquad \text{und} \qquad \bar{x} \otimes \bar{y} := \overline{x \cdot y}$$

Das folgenden Lemma zeigt, dass die Operationen $\oplus$ und $\otimes$ wohldefiniert (d. h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten) sind.

LEMMA 10.2. *Seien $x_0, x_1, y_0, y_1 \in R$, sodass gilt $\bar{x}_0 = \bar{x}_1$ und $\bar{y}_0 = \bar{y}_1$. Dann gilt:*

$$\bar{x}_0 \oplus \bar{y}_0 = \bar{x}_1 \oplus \bar{y}_1 \qquad \textit{und} \qquad \bar{x}_0 \otimes \bar{y}_0 = \bar{x}_1 \otimes \bar{y}_1$$

Beweis. Beachte, dass für alle $x, y \in R$ gilt:

$$x \in I \Rightarrow (x + I) = I \qquad \text{und} \qquad x + I = y + I \iff x - y \in I$$

$\oplus$ *ist wohldefiniert*: Seien nun $x_0, x_1, y_0, y_1 \in R$, sodass gilt $\bar{x}_0 = \bar{x}_1$ und $\bar{y}_0 = \bar{y}_1$. Es gilt nun:

$$\begin{aligned}\overline{x_0 + y_0} = (x_0 + y_0) + I = (x_0 + I) + (y_0 + I) = \\ \big(x_0 + \big(\underbrace{(x_1 - x_0)}_{\in I} + I\big)\big) + \big(y_0 + \big(\underbrace{(y_1 - y_0)}_{\in I} + I\big)\big) = \\ (x_1 + I) + (y_1 + I) = (x_1 + y_1) + I = \overline{x_1 + y_1}\end{aligned}$$

Somit ist $\overline{x_0 + y_0} = \overline{x_1 + y_1}$, d. h. $\bar{x}_0 \oplus \bar{y}_0 = \bar{x}_1 \oplus \bar{y}_1$.

$\otimes$ *ist wohldefiniert*: Weil nach Voraussetzung $\bar{x}_0 = \bar{x}_1$ und $\bar{y}_0 = \bar{y}_1$, gilt $x_0 - x_1 \in I$ und $y_0 - y_1 \in I$. Somit haben wir

$$\left.\begin{aligned} x_0 \cdot (y_0 - y_1) = \quad x_0 y_0 - x_0 y_1 \in I \\ y_1 \cdot (x_0 - x_1) = -x_1 y_1 + x_0 y_1 \in I \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_0 y_0 - x_1 y_1) \in I,$$

woraus folgt $x_0 y_0 + I = x_1 y_1 + I$, d. h. $\overline{x_0 \cdot y_0} = \overline{x_1 \cdot y_1}$. Somit ist $\bar{x}_0 \otimes \bar{y}_0 = \bar{x}_1 \otimes \bar{y}_1$. ⊣

Mit Lemma 10.2 können wir die Ringstruktur vom Ring R auf R/I übertragen und erhalten, dass $\big(R/I, \bar{0}, \bar{1}, \oplus, \otimes\big)$ ein kommutativer Ring ist (den Beweis lassen wir weg). Der Ring R/I ist ein sogenannter **Faktorring**.

DIE RINGE $\mathbb{Z}_m$

In diesem Abschnitt betrachten wir den Faktorring $\mathbb{Z}/I$, wobei $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein Ideal ist, d. h. $I = m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Die Elemente von $\mathbb{Z}/I$ bezeichnen wir wieder mit $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$, aber anstelle von "$\oplus$" und "$\otimes$" schreiben wir "$+$" bzw. "$\cdot$", wobei wir den Multiplikationspunkt wie üblich auch manchmal weglassen. Da Ideale $I \subseteq \mathbb{Z}$ immer von der Form $I = m\mathbb{Z}$ sind für ein $m \in \mathbb{Z}$, schreiben wir $\mathbb{Z}_m$ anstelle von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Für $m \geq 1$ ist somit $\mathbb{Z}_m$ ein Ring mit den $m-1$ Elementen $\bar{0}, \ldots, \overline{m-1}$, insbesondere ist $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ der Nullring $\{\bar{0}\}$. Weiter ist $(\mathbb{Z}_m, \bar{0}, +)$ eine zyklische Gruppe, denn $\mathbb{Z}_m$ wird durch $\bar{1}$ erzeugt, d. h. $\mathbb{Z}_m = \langle\bar{1}\rangle$. Andererseits ist für $m \geq 2$, $(\mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\}, \bar{1}, \cdot)$ im Allgemeinen keine Gruppe (z. B. hat $\bar{6}$ in $\mathbb{Z}_{15}$ kein multiplikativ Inverses). Mit der folgenden Proposition lassen sich die Elemente von $\mathbb{Z}_m$ bestimmen, welche ein multiplikativ Inverses haben.

PROPOSITION 10.3. *Sei $m \geq 2$ und sei $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$. Dann existiert genau dann ein $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ mit $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$, wenn $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$.*

Beweis. Sei $d := \mathrm{ggT}(a, m)$. Existiert ein $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ mit $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$, so erhalten wir $ab = ml + 1$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. Aus $d \mid a$ und $d \mid m$ folgt dann $d \mid (ab - ml)$, d. h. $d \mid 1$. Somit muss $d = 1$ sein.

Ist nun $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$, so finden wir mit dem vEA Zahlen $b, l \in \mathbb{Z}$ mit $ab + ml = 1$. Das heisst $ab \equiv 1 \pmod{m}$, woraus folgt $\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$. ⊣

Wenn wir nur die Elemente aus $\mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\}$ betrachten, welche ein multiplikativ Inverses haben, so bilden diese Elemente bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, die sogenannte **Einheitengruppe** des Rings $\mathbb{Z}_m$, welche wir mit $\mathbb{Z}_m^*$ bezeichnen. Um zu sehen, dass $\mathbb{Z}_m^*$ eine multiplikative Gruppe ist, genügt es zu zeigen, dass mit $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ auch $\bar{a}\bar{b}$ in $\mathbb{Z}_m^*$ ist. Das folgt aber direkt aus den Eigenschaften des ggT, denn wenn $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$ und $\mathrm{ggT}(b, m) = 1$, dann ist auch $\mathrm{ggT}(ab, m) = 1$. Die Ordnung der Gruppe $\mathbb{Z}_m^*$ wird mit $\varphi(m)$ bezeichnet, also $\varphi(m) := |\mathbb{Z}_m^*|$ und φ heisst **Euler'sche φ-Funktion**. Aus Korollar 9.15 erhalten wir den folgenden Satz:

EULER'SCHER SATZ. *Für $m \geq 2$ und $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$ gilt:*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \quad \textit{bzw.} \quad m \mid a^{\varphi(m)} - 1$$

Beweis. Ist $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$, so ist $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$. Weil nun $|Z_m^*| = \varphi(m)$, erhalten wir mit Korollar 9.15, $\bar{a}^{\varphi(m)} = \bar{1}$. Somit ist $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. ⊣

Als Spezialfall des Euler'schen Satzes erhalten wir den folgenden Satz:

KLEINER SATZ VON FERMAT. *Für p prim und $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$ gilt:*

$$a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$$

Beweis. Ist p prim, so ist $\mathbb{Z}_p^* = \{\bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, also $\varphi(p) = p - 1$. Ist $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$, was gleichbedeutend ist mit $\bar{a} \neq \bar{0}$, so gilt mit dem Euler'schen Satz

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Weil nun $a \cdot a^{p-1} = a^p$, gilt somit

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

was zu zeigen war. ⊣

DER CHINESISCHE RESTSATZ

CHINESISCHER RESTSATZ. *Seien $m_0, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ positive, paarweise teilerfremde Zahlen und seien $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $0 \leq i \leq k$ gilt:*

$$n \equiv a_i \pmod{m_i}$$

Algorithmus zur Berechnung von n. Wir illustrieren den Algorithmus zur Berechnung eines solchen n an einem Beispiel, in dem wir die *kleinste* positive solche Zahl n berechnen: Seien $m_0 = 7$, $m_1 = 10$, $m_2 = 13$, und seien $a_0 = 5$, $a_1 = 7$, $a_2 = 10$. Es ist also eine Zahl n zu finden, für die gilt:

$$\begin{aligned} n &\equiv 5 \pmod{7} \\ n &\equiv 7 \pmod{10} \\ n &\equiv 10 \pmod{13} \end{aligned}$$

Wir betrachten zuerst die ersten beiden Bedingungen. Für n muss gelten: $n = k \cdot 7 + 5$ und $n = l \cdot 10 + 7$, d. h.

$$k \cdot 7 + 5 = l \cdot 10 + 7 \quad \Longleftrightarrow \quad k \cdot 7 = l \cdot 10 + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad k \cdot 7 - l \cdot 10 = 2$$

Wir suchen zuerst Zahlen k' und l' mit $k' \cdot 7 - l' \cdot 10 = 1$. Mit dem vEA erhalten wir:

$$\begin{aligned} 10 &= 1 \cdot 7 + 3 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

		1	2	3
0	**1**	1	3	10
1	**0**	1	2	7

Somit ist $k' = 3$ und $l' = 2$, also $k = 2 \cdot k' = 6$ und $l = 2 \cdot l' = 4$, und wir erhalten $n = 6 \cdot 7 + 5 = 47$. Für jede Zahl $n = s \cdot 70 + 47$ ist $n \equiv 5 \pmod{7}$ und $n \equiv 7 \pmod{10}$. Damit die dritte Bedingung erfüllt ist, muss gelten $n = t \cdot 13 + 10$, d. h.

$$s \cdot 70 + 47 = t \cdot 13 + 10 \quad \Longleftrightarrow \quad s \cdot 70 + 37 = t \cdot 13 \quad \Longleftrightarrow \quad t \cdot 13 - s \cdot 70 = 37.$$

Wir suchen wieder zuerst Zahlen s' und t' mit $t' \cdot 13 - s' \cdot 70 = 1$, welche wir wieder mit dem vEA erhalten:

$$\begin{aligned} 70 &= 5 \cdot 13 + 5 \\ 13 &= 2 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

		5	2	1	1	2
0	**1**	5	11	16	27	70
1	**0**	1	2	3	5	13

Somit ist $t' = 27$ und $s' = 5$, also $t = 37 \cdot t' = 999$ und $s = 37 \cdot s' = 185$, und wir erhalten, dass die Zahl $t \cdot 13 + 10 = 12\,997$ alle drei Bedingungen erfüllt.

Da nun für jedes $k \in Z$, die Zahl $12\,997 + k \cdot \mathrm{kgV}(7, 10, 13) = 12\,997 + k \cdot (7 \cdot 10 \cdot 13) = 12\,997 + k \cdot 910$ ebenfalls alle drei Bedingungen erfüllt, und alle Lösungen n von dieser Form sind, haben wir alle Lösungen gefunden. Zum Beispiel ist die kleinste positive Zahl, welche alle drei Bedingungen erfüllt: $n = 257$. ⊣

DIE KÖRPER $\mathbb{F}_p$

Für $m \geq 2$ ist der Ring $(\mathbb{Z}_m, \bar{0}, \bar{1}, +, \cdot)$ genau dann ein Körper, wenn jedes Element aus $\mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\}$ ein multiplikativ Inverses besitzt. Mit Proposition 10.3 ist dies genau dann der Fall, wenn für jedes $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\}$ gilt $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$. Das ist genau dann erfüllt, wenn m eine Primzahl ist: Denn ist m eine Primzahl und $1 \leq a < m$, so ist $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$. Ist andererseits m keine Primzahl, so existiert ein $1 < a < m$ mit $a \mid m$. Das heisst $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\}$, $\mathrm{ggT}(a, m) > 1$ und $\bar{a}$ hat kein multiplikativ Inverses.

Der Ring $\mathbb{Z}_m$ ist also genau dann ein Körper (engl. *field*), wenn m eine Primzahl ist. Die Körper $\mathbb{Z}_p$ für p prim werden mit $\mathbb{F}_p$ bezeichnet.

Etwas allgemeiner erhalten wir für Ringe R, dass R/I genau dann ein Körper ist, wenn das Ideal I maximal ist, wobei ein Ideal I ein **maximales Ideal** ist, wenn $I \neq R$ und I in keinem echten Ideal $J \subsetneq R$ echt enthalten ist.

PROPOSITION 10.4. *Sei R ein Ring und sei $I \neq R$ ein Ideal von R. Dann ist R/I genau dann ein Körper, wenn I ein maximales Ideal ist.*

Beweis. ($\Leftarrow$): Wir zeigen diese Richtung mit Kontraposition. Sei $I \subsetneq R$ ein Ideal und sei R/I kein Körper. Dann existiert ein $a_0 \in R \setminus I$ (d. h. $\bar{a}_0 \neq \bar{0}$), sodass für alle $x \in R$ gilt $\bar{a}_0 \cdot \bar{x} \neq \bar{1}$. Sei

$$J_0 := \{x \cdot a_0 + y \cdot b : x, y \in R \wedge b \in I\}.$$

Dann ist $J_0 \subseteq R$ ein Ideal mit $a_0 \in J_0$ und $1 \notin J_0$. Um $1 \notin J_0$ zu sehen, beachte, dass aus $x \cdot a_0 + y \cdot b = 1$ mit $b \in I$ (d. h. $\overline{y \cdot b} = \bar{0}$), $\bar{x} \cdot \bar{a}_0 = \bar{1}$ folgt, im Widerspruch zu unserer Annahme. Es gilt somit

$$I \underset{a_0 \notin I}{\subsetneq} J_0 \underset{1 \notin J_0}{\subsetneq} R$$

und I ist nicht maximal.

($\Rightarrow$): Sei R/I ein Körper und sei $I \subsetneq J \subseteq R$. Weiter sei $a_0 \in J \setminus I$. Weil R/I ein Körper ist, existiert ein $\bar{x}$ mit $\bar{a}_0 \cdot \bar{x} = \bar{1}$. Das heisst, $a_0 \cdot x = 1 + b$ für ein $b \in I$. Weil $a_0 \in J$, ist mit (I_2) auch $a_0 \cdot x \in J$, und weil $I \subseteq J$, ist $b \in J$. Somit ist mit (I_1) auch $a_0 \cdot x - b = 1 \in J$. Weil $1 \in J$, haben wir $J = R$, und somit ist I ein maximales Ideal. ⊣

Als Folgerung erhalten wir:

KOROLLAR 10.5. *Ein Ideal $m\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ ist genau dann maximal, wenn m eine Primzahl ist.*

Zum Schluss zeigen wir, dass die multiplikative Gruppe eines Körper $\mathbb{F}_p$ zyklisch ist.

THEOREM 10.6. *Die Gruppe $(\mathbb{F}_p^*, 1, \cdot)$ ist zyklisch.*

Beweis. Weil $|\mathbb{F}_p^*| = p - 1$, ist mit Korollar 9.15 jedes $a \in \mathbb{F}_p^*$ eine Nullstelle der Polynomfunktion $x^{p-1} - 1$. Allgemein gilt, dass in einem Körper die Polynomfunktion $x^k - 1$ höchstens k verschiedene Nullstellen besitzt (Beweis durch abspalten von Nullstellen von $x^k - 1$).

Sei $\mathbb{F}_p^* = \{a_1, \ldots, a_{p-1}\}$ und sei $\mu_i := \mathrm{ord}(a_i)$. Weiter sei $\mu_0 := \max\{\mu_i : 1 \leq i \leq p-1\}$ und sei $g \in \mathbb{F}_p^*$ so, dass $\mathrm{ord}(g) = \mu_0$.

Ist $\mu_0 = p - 1$, so ist $\mathbb{F}_p^* = \langle g \rangle$, also zyklisch.

Ist $\mu_0 < p - 1$ und gilt $\mu_i \mid \mu_0$ für alle $1 \leq i \leq p - 1$, so ist jedes $a \in \mathbb{F}_p^*$ eine Nullstelle der Polynomfunktion $x^{\mu_0} - 1$. Da aber $x^{\mu_0} - 1$ höchstens μ_0 verschiedene Nullstellen besitzt, folgt $|\mathbb{F}_p^*| \leq \mu_0 < p - 1$, was ein Widerspruch zu $|\mathbb{F}_p^*| = p - 1$ ist.

Ist $\mu_0 < p - 1$ und gilt $\mu_j \nmid \mu_0$ für ein $1 \leq j \leq p - 1$, so finden wir, weil $\mu_j < \mu_0$, ein $d > 1$ mit $d \mid \mu_j$ und $\mathrm{ggT}(d, \mu_0) = 1$. Für $\nu := \frac{\mu_j}{d}$ ist dann $\mathrm{ord}(a_j^\nu) = d$ und mit Aufgabe 38 ist dann $\mathrm{ord}(a_j^\nu \cdot g) = d \cdot \mu_0 > \mu_0$, was ein Widerspruch zur Definition von μ_0 ist. ⊣

11. FORMALE POTENZREIHEN

Eine **Reihe** ist eine Summe mit unendlich vielen Summanden. Zum Beispiel ist die Summe aller natürlichen Zahlen

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots$$

eine Reihe. Eine endliche Summe lässt sich immer auch als Reihe schreiben, indem wir einfach unendlich viele Nullen addieren. Zum Beispiel ist $3 + 4$ eine Summe, aber

$$3 + 4 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

ist eine Reihe. Eine **formale Potenzreihe** (oder einfach Potenzreihe) ist eine Reihe der Form

$$a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

wobei die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ (für $n \in \mathbb{N}$) Elemente aus einem Körper K sind (z. .B. aus $\mathbb{R}$) und z (oder x, oder s, etc.) irgend eine *Unbestimmte* ist, wobei eine Unbestimmte weder ein Körperelement noch eine Variable ist. Zum Beispiel sind $(1z^0 + 2z^1 + 3z^2 + \dots)$ und $(0z^0 - 1z^1 + 0z^2 - 1z^3 + 0z^4 - 1z^5 + \dots)$ Potenzreihen.

Üblicherweise schreiben wir bloss a_0 anstelle von $a_0 z^0$, und anstelle von $a_1 z^1$ schreiben wir bloss $a_1 z$. Wenn $a_n = 0$ (für irgend $n \in \mathbb{N}$), so schreiben wir $a_n z^n$ nicht. Die obigen Potenzreihen können also wie folgt geschrieben werden:

- $(1z^0 + 2z^1 + 3z^2 + \dots) = (1 + 2z + 3z^2 + \dots)$
- $(0z^0 - 1z^1 + 0z^2 - 1z^3 + 0z^4 - 1z^5 + \dots) = (-z - z^3 - z^5 - \dots)$

Wie oben erwähnt, darf anstelle von z auch irgend eine andere Unbestimmte geschrieben werden, wie zum Beispiel x oder y.

Formal kann die n-te Potenz der Unbestimmten z, also z^n, aufgefasst werden als ein Vektor mit abzählbar unendlich vielen Koordinaten, wobei nur an der n-ten Stelle eine 1 und sonst überall 0-en stehen:

$$[0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{1}, 0, 0, 0, 0, \dots]$$

Der Ausdruck $a_n z^n$ entspricht dann dem Vektor

$$[0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{a_n}, 0, 0, 0, 0, \dots]$$

und die Potenzreihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ entspricht dem Vektor

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots].$$

Formale Potenzreihen können also als Vektoren in einem ω-dimensionalen Vektorraum über dem Körper K aufgefasst werden, wobei die Potenzen $z^0, z^1, \dots, z^n, \dots$ der Unbestimmten z die Rolle der Basisvektoren $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$ übernehmen.

Ist für eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ und für alle $n \geq n_0$, $a_n = 0$, so entspricht die Potenzreihe

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)$$

einem **Polynom**. Das heisst, Polynome sind Potenzreihen bei denen nur endlich viele Koeffizienten von Null verschieden sind.

Jede Potenzreihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ definiert eine Funktion $A : \mathbb{N} \to K$ dadurch, dass wir für alle $n \in \mathbb{N}$ festsetzen $A(n) := a_n$. Umgekehrt definiert jede Funktion $A : \mathbb{N} \to K$ eine Potenzreihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ dadurch, dass wir festsetzen $a_n := A(n)$. Diese Beziehung zwischen Funktionen $A : \mathbb{N} \to K$ (bzw. abzälbaren Folgen in K) und Potenzreihen werden wir benutzten, um *generierende Funktionen* von Zahlenfolgen (für $K = \mathbb{R}$) zu berechnen.

Die wohl einfachste (echte) Potenzreihe ist die *geometrische Reihe*:

$$\mathrm{geo}(z) := (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$$

Wenn wir in der Potenzreihe $\mathrm{geo}(z)$ die Unbestimmte z ersetzen durch $-z$ oder z^2, so erhalten wir wieder eine Potenzreihe, welche wir mit $\mathrm{geo}(-z)$ bzw. $\mathrm{geo}(z^2)$ bezeichnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{geo}(-z) &= ((-z)^0 + (-z)^1 + (-z)^2 + \ldots) = (1 - z + z^2 - z^3 + \ldots) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n z^n \\ \mathrm{geo}(z^2) &= ((z^2)^0 + (z^2)^1 + (z^2)^2 + \ldots) = (1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n}\end{aligned}$$

Rechnen mit formalen Potenzreihen

Formale Potenzreihen können addiert und multipliziert werden, jede Potenzreihe hat ein additiv Inverses und manche Potenzreiehn haben sogar ein multiplikativ Inverses: Im Folgenden seien

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) \quad \text{und} \quad (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \ldots)$$

zwei beliebige Potenzreihen.

Die Addition und Subtraktion (bzw. Addition mit dem additiv Inversen) dieser beiden Potenzreiehen geschieht komponentenweise:

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) \pm (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots) = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots)$$

mit $c_n = a_n \pm b_n$.

Die Multiplikation folgt direkt aus dem Distributivgesetz und ist eine Art "Faltung":

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots) = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots)$$

mit $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$.

Damit eine Potenzreihe $(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)$ ein multiplikativ Inverses $(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)^{-1}$ besitzt, muss $b_0 \neq 0$ sein. Sei $(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots)$ die Potenzreihe $(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)^{-1}$. Dann gilt

$$(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots) \cdot (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots) = 1$$

und mit der Regel für die Multiplikation lassen sich dann die Koeffizienten c_n sogenannten *Koeffizientenvergleich* Schrit für Schritt durch berechnen: Es ist $1 = b_0 c_0$, also $c_0 = {b_0}^{-1}$ (beachte, dass $b_0 \neq 0$). Weiter ist $0 = b_0 c_1 + b_1 c_0$ und mit $c_0 = {b_0}^{-1}$ ist $c_1 = {b_0}^{-1}(-b_1 {b_0}^{-1})$, etc.

Für die Potenzreihe $(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)^{-1}$ schreiben wir auch

$$\frac{(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots)}{(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)}.$$

Als Anwendung der Multiplikation von Potenzreihen berechnen wir nun drei Produkte geometrischer Potenzreihen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{geo}(z) \cdot \mathrm{geo}(-z) &= 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n} = \mathrm{geo}(z^2) \\ \mathrm{geo}(z) \cdot \mathrm{geo}(z) = \mathrm{geo}(z)^2 &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) z^n \\ \mathrm{geo}(z)^2 \cdot \mathrm{geo}(-z) &= 1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 4z^6 + \ldots\end{aligned}$$

Als letztes Beispiel berechnen wir $(1-z)\cdot \mathrm{geo}(z)$. Es ist leicht zu sehen, dass gilt

$$(1-z)\cdot \mathrm{geo}(z) = 1\,,$$

woraus folgt:

$$\mathrm{geo}(z) = (1-z)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{geo}(z) = \frac{1}{1-z}$$

Damit erhalten wir zum Beispiel

$$\mathrm{geo}(z)\cdot\mathrm{geo}(-z) = \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-z^2} = \mathrm{geo}(z^2),$$

was wir oben bereits ausgerechnet haben.

UNENDLICHE PRODUKTE FORMALER POTENZREIHEN

Sei Pr die Menge aller Potenzreihen (über einem Köper K) in der Unbestimmten z. Eine unendliche Familie $\mathscr{F} = \{f_l \in \mathrm{Pr} : l \in \mathbb{N}\}$ von Potenzreihen heisst **multiplizierbar**, falls

$$\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l \in \mathrm{Pr}\,.$$

Die Aussage $\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l \in \mathrm{Pr}$ bedeutet, dass die *endlichen* Produkte $\prod_{l\in L} f_l \in \mathrm{Pr}$ für $L\to\infty$ gegen eine Potenzreihe $f\in\mathrm{Pr}$ *konvergieren*. Um dies formaler auszudrücken, definieren wir für jedes $m\in\mathbb{N}$ die Menge Pr_m wie folgt.

$$\mathrm{Pr}_m := \{z^m\cdot f : f\in\mathrm{Pr}\}$$

Beachte, dass Pr_m ein Ideal ist im Ring $(\mathrm{Pr}, 0_K, 1_K, +, \cdot)$. Insbesondere ist Pr_1 ein maximales Ideal und es gilt $\mathrm{Pr}\,/\,\mathrm{Pr}_1 \cong K$.

Dass die endlichen Produkte $\prod_{l\in L} f_l \in \mathrm{Pr}$ für $L\to\infty$ gegen eine Potenzreihe $f\in\mathrm{Pr}$ konvergieren, definieren wir nun wie folgt: Es gibt eine Potenzreihe $f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, sodass für jedes $m\in\mathbb{N}$ ein $L'\in\mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $L\geq L'$ gilt:

$$\left(\prod_{l\in L} f_l - \sum_{n=0}^{m} a_n z^n\right) \in \mathrm{Pr}_{m+1}$$

Wir betrachtenn folgendes Beispiel: Sei $f_l = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{l,n} z^n$ und nehmen wir an, dass $a_{l,0}=1$ für alle $l\in\mathbb{N}$. Weiter nehmen wir an, dass die endlichen Produkte $\prod_{l\in L} f_l \in \mathrm{Pr}$ für $L\to\infty$ gegen die Potenzreihe $f=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ konvergieren. Für den Koeffizienten a_0 gilt somit

$$a_0 = \prod_{l\in\mathbb{N}} a_{l,0} = 1.$$

Nun betrachten wir den Koeffizienten a_n für ein $n\geq 1$. Aus der Definition der Multiplikation von Potenzreihen folgt

$$a_n = \sum_{\varepsilon\in S_n}\prod_{l\in\mathbb{N}} a_{l,\varepsilon(l)}$$

wobei S_n die Menge aller Funktionen $\varepsilon:\mathbb{N}\to n+1$ bezeichnet mit $\sum_{l\in\mathbb{N}}\varepsilon(l)=n$. Eine sicher hinreichende Bedingung für die Existenz von a_n ist, dass nur endlich viele Produkte $\prod_{l\in\mathbb{N}} a_{l,\varepsilon(l)}$ von 0 verschieden sind. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn es nur endlich viele $l\in\mathbb{N}$ gibt, sodass $a_{l,k}\neq 0$ für ein $1\leq k\leq n$.

Um zu beweisen, dass spezielle Familien von Potenzreihen multiplizierbar sind, führen wir noch folgenden Begriff ein: Ist $g \in \mathrm{Pr} \setminus \{0\}$ und gilt für ein $m \in \mathbb{N}$, $g \in \mathrm{Pr}_m \setminus \mathrm{Pr}_{m+1}$, so sagen wir, dass die Potenzreihe g den **Minimalgrad** m besitzt, d. h. g ist von der Form $\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_m \neq 0$. Der Minimalgrad von $g \in \mathrm{Pr}$ wird mit $\deg_{\min}(g)$ bezeichnet.

PROPOSITION 11.1. *Sei $\mathscr{F} = \{f_l \in \mathrm{Pr} : l \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von Potenzreihen mit folgenden Eigenschaften: Für alle $l \in \mathbb{N}$ ist $f_l = 1 + g_l$ für ein g_l mit $\deg_{\min}(g_l) > 0$, und für alle $m \in \mathbb{N}$ ist die Menge*

$$\{l \in \mathbb{N} : \deg_{\min}(g_l) \leq m\}$$

endlich. Dann ist $\mathscr{F}$ eine mulitiplizierbare Familie.

Beweis. Weil $\deg_{\min}(g_l) > 0$ ist $a_0 = \prod_{n \in \mathbb{N}} 1 = 1$. Der Beweis ist nun mit Induktion über m. Wir nehmen an, wir hätten die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_m$ (für ein $m \geq 0$) der Potenzreihe f, gegen welche $\prod_{l \in \mathbb{N}} f_l$ konvergiert, bereits bestimmt. Das heisst, es gibt ein $L' \in \mathbb{N}$, sodass für alle $L \geq L'$ gilt:

$$\left(\prod_{l \in L} f_l - \sum_{n=0}^{m} a_n z^n\right) \in \mathrm{Pr}_{m+1}$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass es für $m+1$ nur endlich viele Potenzreihen g_l gibt mit $\deg_{\min}(g_l) \leq m+1$. Sei $\sum_{n=0}^{m+1} \tilde{a}_n z^n$ das Produkt der entsprechenden Potenzreihen $f_l = 1 + g_l$ und sei $L' \in \mathbb{N}$ so, dass jedes l mit $\deg_{\min}(g_l) \leq m+1$ in L' ist. Dann gilt $\tilde{a}_n = a_n$ für alle $0 \leq n \leq m$. Weiter gilt, dass jedes endliche Produkt von Potenzreihen $f_{l'}$ mit $l' \notin L'$ in Pr_{m+2} ist. Somit gilt für alle $L \geq L'$,

$$\prod_{l \in L} f_l - \left(\sum_{n=0}^{m} a_n z^n + \tilde{a}_{m+1}\, z^{m+1}\right) \in \mathrm{Pr}_{m+2}$$

wobei für $0 \leq n \leq m$ gilt $\tilde{a}_n = a_n$. Setzen wir $a_{m+1} := \tilde{a}_{m+1}$, so ist für alle $L \geq L'$

$$\left(\prod_{l \in L} f_l - \sum_{n=0}^{m+1} a_n z^n\right) \in \mathrm{Pr}_{m+2}$$

wie gewünscht. ⊣

FORMALES ABLEITEN VON FORMALEN POTENZREIHEN

Ist $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathrm{Pr}$, so ist die formale Ableitung $D(f)$ von f definiert durch

$$D(f) := \sum_{n \in \mathbb{N}} n \cdot a_n z^{n-1}.$$

PROPOSITION 11.2. *Sind $f, g \in \mathrm{Pr}$, so gelten die folgenden Regeln:*

$$D(f+g) = D(f) + D(g) \quad \textit{und} \quad D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$$

Beweis. Die Regel $D(f+g) = D(f) + D(g)$ folgt unmittelbar aus der Definition von D.

Um die Regel $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$ zu verifizieren, seien $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ und $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$. Dann gilt für $f \cdot g = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$, $c_{n+1} = a_0 b_{n+1} + a_1 b_n + \ldots + a_n b_1 + a_{n+1} b_0$, und für $D(f \cdot g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{c}_n z^n$ erhalten wir

$$\tilde{c}_n = (n+1)\big(a_0 b_{n+1} + a_1 b_n + \ldots + a_n b_1 + a_{n+1} b_0\big).$$

Ist $D(f)\cdot g=\sum_{n\in\mathbb{N}} d_n z^n$ und $f\cdot D(g)=\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n z^n$, so ist

$$\begin{array}{rclcccccccl} d_n &=& a_1b_n &+& 2a_2b_{n-1} &+& \ldots &+& na_nb_1 &+& (n+1)a_{n+1}b_0,\\ e_n &=& na_1b_n &+& (n-1)a_2b_{n-1} &+& \ldots &+& a_nb_1 &+& (n+1)a_0b_{n+1}, \end{array}$$

und es gilt $d_n+e_n=\tilde{c}_n$. ⊣

Ist $f\in \mathrm{Pr}$ mit $\deg_{\min}(f)=0$, so ist die **logarithmische Ableitung** $D_{\log}(f)$ definiert durch

$$D_{\log}(f):=\frac{D(f)}{f}.$$

PROPOSITION 11.3. *Ist $\mathscr{F}=\{f_l\in\mathrm{Pr}: l\in\mathbb{N}\}$ eine multiplizierbare Familie mit den Eigenschaften $f_l=1+g_l$ für $g_l\in\mathrm{Pr}_1$ und $\big|\{l\in\mathbb{N}:\deg_{\min}(g_l)\le m\}\big|$ endlich für alle $l,m\in\mathbb{N}$, so ist*

$$D_{\log}\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l\big)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{D(f_l)}{f_l}\quad \textit{und}\quad \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{D(f_l)}{f_l}\in\mathrm{Pr}\,.$$

Beweis. Nach Definition von D bzw. $D_{\log}$ und mit den Eigenschaften von $\mathscr{F}$ gilt

$$D_{\log}\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l\big)=\frac{D(f_0)\cdot\prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+1}+f_0\cdot D\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+1}\big)}{\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l}=$$

$$\frac{D(f_0)}{f_0}+\frac{f_0\cdot D(f_1)\cdot\prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+2}+f_0\cdot f_1\cdot D\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+2}\big)}{\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l}=$$

$$\frac{D(f_0)}{f_0}+\frac{D(f_1)}{f_1}+\frac{f_0\cdot f_1\cdot D(f_2)\cdot\prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+3}+f_0\cdot f_1\cdot f_2\cdot D\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+3}\big)}{\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l}=\ldots$$

und wir erhalten schliesslich

$$D_{\log}\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l\big)=\frac{D(f_0)}{f_0}+\frac{D(f_1)}{f_1}+\frac{D(f_2)}{f_2}+\ldots=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{D(f_l)}{f_l}.$$

Aus $f_l=1+g_l$ und $\deg_{\min} g_l\ge 1$ für alle $l\in\mathbb{N}$, folgt ${f_l}^{-1}=\frac{1}{f_l}\in\mathrm{Pr}$. Weiter folgt aus $f_l=1+g_l$, dass gilt $D(f_l)=D(g_l)$, und mit $\deg_{\min}(D(g_l))=\deg_{\min}(g_l)-1$, erhalten wir schliesslich

$$\deg_{\min}(g_l)-1=\deg_{\min}\Big(\frac{D(f_l)}{f_l}\Big).$$

Weil nun die Menge $\{l\in\mathbb{N}:\deg_{\min}(g_l)\le m\}$ endlich ist für jedes $m\in\mathbb{N}$, folgt, dass die Summe $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{D(f_l)}{f_l}$ eine formale Potenzreihe ist. ⊣

GENERIERENDE FUNKTIONEN

Im Folgenden versuchen wir eine gegebene Zahlenfolge, zum Beispiel die Folge

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$

durch eine einfache Funktion zu generieren. Dazu betrachten wir zuerst die Zahlenfolge als Folge der Koeffizienten einer Potenzreihe. Zum Beispiel entspricht der obigen Zahlenfolge die Potenzreihe

$$\mathrm{geo}(z) = (1 + 1z + 1z^2 + 1z^3 + 1z^4 + \ldots)\,.$$

Nun suchen wir einen einfachen (d. h. endlichen) Ausdruck, welcher diese Potenzreihe, in unserem Beispiel $\mathrm{geo}(z)$, generiert. Wie wir bereits wissen gilt:

$$\mathrm{geo}(z) = \frac{1}{1-z}\,,$$

oder anders ausgedrückt:

$$\frac{1}{1-z} = (1 + 1z + 1z^2 + 1z^3 + 1z^4 + \ldots)$$

Wir sagen nun, dass die Funktion $\frac{1}{1-z}$ die Zahlenfolge $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$ **generiert**, bzw. dass $\frac{1}{1-z}$ eine **generierende Funktion** dieser Zahlenfolge ist.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Zahlenfolge

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

die wir als Koeffizienten der Potenzreihe $\mathrm{geo}(z)^2$ erkennen. Aus

$$\mathrm{geo}(z)^2 = \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-2z+z^2}$$

folgt

$$\frac{1}{1-2z+z^2} = (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \ldots)$$

und somit wird die Zahlenfolge $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ durch $\frac{1}{1-2z+z^2}$ generiert.

Als nächstes Beispiel betrachten wir nun die Zahlenfolge der sogenannten **Dreiecks-Zahlen**

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ \ldots$$

wobei k genau dann eine Dreieckszahl ist, wenn es eine positive natürliche Zahl n gibt, so dass gilt

$$k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}\,.$$

Da nun gilt

$$\frac{1}{1-3z+3z^2-z^3} = (1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + 15z^4 + \ldots) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n$$

wird die Folge der Dreieckszahlen durch die Funktion $\frac{1}{1-3z+3z^2-z^3}$ generiert. Es sei hier noch erwähnt, dass gilt:

$$\frac{1}{1-3z+3z^2-z^3} = \frac{1}{(1-z)^3} = \mathrm{geo}(z)^3$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir Zahlenfolgen $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ welche durch folgende Vorschrift definiert werden (wobei k und l irgendwelche Zahlen sind):

$$a_0 := 1 \qquad a_1 := k \qquad a_{n+2} = k \cdot a_{n+1} + l \cdot a_n$$

Solche Zahlenfolgen heissen *rekursiv definierte Zahlenfolgen*. Für $k = l = 1$ erhalten wir zum Beispiel die Folge der **Fibonacci-Zahlen**:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

Wir zeigen nun, dass Zahlenfolgen, welche wie oben definiert sind, durch

$$\frac{1}{1-kz-lz^2}$$

generiert werden. Anders ausgedrückt: Ist $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ eine Zahlenfolge für die gilt $a_0 = 1$, $a_1 = k$, und allgemein $a_{n+2} = k \cdot a_{n+1} + l \cdot a_n$, dann ist

$$\frac{1}{1-kz-lz^2} = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n.$$

Um dies zu sehen, beachte, dass aus der Definition von $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ folgt:

$$1 = (1-kz-lz^2)\cdot(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) = \\ a_0 + \underbrace{(a_1 - ka_0)}_{=0} z + \underbrace{(a_2 - ka_1 - la_0)}_{=0} z^2 + \underbrace{(a_3 - ka_2 - la_1)}_{=0} z^3 + \ldots$$

Für die Fibonacci-Zahlen, also im Fall $k = l = 1$, gilt somit:

$$\frac{1}{1-z-z^2} = 1 + 1z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + \ldots$$

Als letztes Beispiel bestimmen wir eine generierende Funktion für die Folge der Quadratzahlen

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \ldots$$

Dafür beginnen wir mit der Potenzreihe

$$f = 1z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \ldots$$

und leiten diese formal ab. Wir erhalten dann

$$D(f) = 1^2 + 2^2 z + 3^2 z^2 + 4^2 z^3 + \ldots$$

und weil $f = z \cdot \mathrm{geo}(z)^2$, ist

$$D(f) = D\big(z \cdot \mathrm{geo}(z)^2\big) = \mathrm{geo}(z)^2 + z \cdot 2\,\mathrm{geo}(z) \cdot D(\mathrm{geo}(z)).$$

Weil nun $D(\mathrm{geo}(z)) = \mathrm{geo}(z)^2$, ist

$$\mathrm{geo}(z)^2 + 2z\,\mathrm{geo}(z)^3 = \mathrm{geo}(z)^2\big(1 + 2z\,\mathrm{geo}(z)\big) = \frac{1}{(1-z)^2}\Big(1 + \frac{2z}{1-z}\Big) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

die gesuchte generierende Funktion der Quadratzahlen.

Die Algebra der formalen Potenzreihen*

Sie K ein Körper und sei $K[[x]]$ die Menge der formalen Potenzreihen über K (d. h. die Menge der formalen Potenzreihen in der Unbestimmten x mit Koeffizienten in K). Dann ist $(K[[x]], 0_K, +)$ eine abelsche Gruppe und mit der Multiplikation ist somit $(K[[x]], 0_K, 1_K, +, \cdot)$ ein Ring. Da wir die Potenzreihen aus $K[[x]]$ mit Elementen aus K multiplizieren können, operiert der Körper K auf dem Ring $K[[x]]$ und somit wird $K[[x]]$ zu einer **Algebra** (d. h. ein Körper operiert auf einem Ring). Wenn wir nur die Gruppenstruktur von $K[[x]]$ betrachten, so erhalten wir einen Vektorraum (d. h. ein Körper operiert auf einer abelschen Gruppe). Dieser Vektorraum ist abzählbar unendlich (eine Basis ist zum Beispiel $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$).

12. Endliche Körper von Primzahlpotenzordnung

Irreduzible Polynome in $\mathbb{F}_p[X]$

Im Folgenden sei $\mathbb{F}_p[X]$ der Ring der Polynome über dem Körper $\mathbb{F}_p$ (p prim), d. h. $\mathbb{F}_p[X]$ ist die Menge der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von Polynomen.

Für ein Polynom $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{F}_p[X]$ ist der **Grad** von f definiert als $\deg(f) := \max\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$ falls solch eine Zahl existiert, sonst sei $\deg(f) := -\infty$ (d. h. $\deg(0) = -\infty$), wobei wir definieren $-\infty + -\infty = -\infty + n = -\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Faktum 12.1. *Sind $f, g \in \mathbb{F}_p[X]$, so ist $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.*

Beweis. Ist $f = 0$ oder $g = 0$, so ist $-\infty = \deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$. Andernfalls seien $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$ und $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n$ mit $a_m \neq 0 \neq b_n$. Weil $\mathbb{F}_p$ ein Körper ist, gilt $a_mb_n \neq 0$ und aus $f \cdot g = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + \ldots + a_mb_nX^{m+n}$ folgt $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$. ⊣

Ein Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ mit $\deg(f) > 0$ heisst **irreduzibel** über $\mathbb{F}_p$, wenn aus $g \cdot h = f$ für $g, h \in \mathbb{F}_p[X]$ folgt $\deg(g) = 0$ oder $\deg(h) = 0$, sonst heisst f **reduzibel**. Wie für die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung (Theorem 8.4) lässt sich zeigen, dass sich jedes Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ mit $f \neq 0$ bis auf Vertauschung der Faktoren und bis auf Faktoren aus $\mathbb{F}_p$ eindeutig als Produkt irreduzibler Polynome schreiben lässt.

Für $f \in \mathbb{F}_p[X]$ sei

$$(f) := \{g \cdot f : g \in \mathbb{F}_p[X]\}$$

das von f erzeugte Ideal in $\mathbb{F}_p[X]$. Dann ist mit Lemma 10.2 $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ ein Ring.

Proposition 12.2. *Sei $f \in \mathbb{F}_p[X]$ mit $\deg(f) \geq 1$. Dann ist $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ genau dann ein Körper wenn (f) irreduzibel über $\mathbb{F}_p$ ist.*

Beweis. ($\Leftarrow$) Sei $f \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel mit $\deg(f) \geq 1$. Für jedes $g \in \mathbb{F}_p[X] \setminus (f)$ finden wir mit dem vEA Polynome $h_1, h_2, d \in \mathbb{F}_p[X]$, sodass gilt $h_1f + h_2g = d$, wobei $d \mid f$ und $d \mid g$. Weil f irreduzibel ist, gilt entweder $d = f$ oder $d \in \mathbb{F}_p$ (also $\deg(d) = 0$). Im ersten Fall ist $d \in (f)$ und somit ist auch $g \in (f)$, was unserer Annahme widerspricht. Im zweiten Fall ist

$$h_1f + h_2g \equiv h_2g \equiv 1 \pmod{f}$$

(weil $\mathbb{F}_p$ ein Körper ist). Daraus folgt, dass $\bar{h}_2$ im Ring $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ ein multiplikativ Inverses von $\bar{g} \neq \bar{0}$ ist, und weil g beliebig war, ist $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ ein Körper.

($\Rightarrow$) Mit Kontraposition, d. h. wir nehmen an, dass (f) reduzibel ist. Mit Proposition 10.4 genügt es zu zeigen, dass (f) kein maximales Ideal ist. Ist f reduzibel, so existieren Polynome $g, h \in \mathbb{F}_p[X]$ mit $g \cdot h = f$ und $\deg(g), \deg(h) > 0$, d. h. weder g noch h ist in $\mathbb{F}_p$. Aus Faktum 12.1 folgt $\deg(f) = \deg(g) + \deg(h)$. Weil $\deg(h) > 0$, ist $\deg(g) < \deg(f)$, und mit $g \mid f$ folgt $(f) \subsetneq (g)$. Weiter erhalten wir mit $\deg(g) > 0$, dass $(g) \subsetneq \mathbb{F}_p[X]$. Also gilt $(f) \subsetneq (g) \subsetneq \mathbb{F}_p[X]$ und (f) ist kein maximales Ideal. ⊣

Korollar 12.3. *Ist $f \in \mathbb{F}_p[X]$ mit $\deg(f) = n \geq 1$ irreduzibel, so ist $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ ein Körper der Ordnung p^n.*

Beweis. Mit Proposition 12.2 ist $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ ein Körper und weil

$$\mathbb{F}_p[X]/(f) \cong \{g \in \mathbb{F}_p[X] : \deg(g) < n\}$$

und $|\mathbb{F}_p| = p$, hat der Körper $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ die Ordnung p^n. ⊣

EXISTENZ VON KÖRPERN DER ORDNUNG p^n

Ein Polynom der Form $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{F}_p[X]$ mit $a_n = 1$ heisst **normiert**. Ist $f = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n \in \mathbb{F}_p[X]$ mit $b_n \neq 0$ ein irreduzibles Polynom, so ist auch $\frac{b_0}{b_n} + \frac{b_1}{b_n}X + \ldots + \frac{b_n}{b_n}X^n$ ein irreduzibles Polynom. Um die Existenz von Körpern der Ordnung p^n zu beweisen, genügt es also, die Existenz von normierten, irreduziblen Polynomen vom Grad n zu zeigen.

THEOREM 12.4. *Zu jeder positiven Zahl $n \in \mathbb{N}$ und zu jeder Primzahl p existiert ein Körper der Ordnung p^n.*

Beweis. Mit Korollar 12.3 genügt es zu zeigen, dass für jedes $n \geq 1$ und jede Primzahl p mindestens ein normiertes, irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ vom Grad n existiert.

Sei p prim beliebig, aber fest gewählt. Sei weiter I_n die Menge aller normierten, irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_p[X]$ vom Grad n, d. h.

$$I_n = \{f_{1,n}, \ldots, f_{r_n,n}\}$$

mit $f_{i,n}$ normiert, irreduzibel und $\deg(f_{i,n}) = n$. Ist $r_n = 0$, so ist $I_n = \emptyset$. Wir müssen also zeigen, dass für alle $n \geq 1$ gilt $r_n \geq 1$.

Für ein festes n betrachten wir zuerst die Menge F_n aller normierten (nicht notwendigerweise irreduziblen) Polynome beliebigen Grades, welche wir als Produkte von Polynomen $f_{i,n} \in I_n$ bilden können (beachte, dass Produkte normierter Polynome normiert sind). Der Menge F_n ordnen wir eine abzählende formale Potenzreihe zu: Mit dem Polynom $f_{i,n}$, für ein festes i ($1 \leq i \leq r_n$), können wir die

Polynome	$f_{i,n}^0$	$f_{i,n}^1$	$f_{i,n}^2$	$\ldots$	$f_{i,n}^k$	$\ldots$	bilden, diese haben
Grad	0	n	$2n$	$\ldots$	kn	$\ldots$	und die abzählende
Potenzreihe ist	$1z^0 +$	$1z^n +$	$1z^{2n} +$	$\ldots +$	$1z^{kn} +$	$\ldots$	$= \mathrm{geo}(z^n).$

Mit den beiden Polynomen $f_{i,n}$ und $f_{j,n}$ für $i \neq j$, können wir die

Polynome	$f_{i,n}^0 = f_{j,n}^0$	$f_{i,n}^1, f_{j,n}^1$	$f_{i,n}^2,\ f_{i,n}\cdot f_{j,n},\ f_{j,n}^2$	$\ldots$	bilden, mit
Grad	0	n	$2n$	$\ldots$	und abzählender
Potenzreihe	$1z^0 +$	$2z^n +$	$3z^{2n} +$	$\ldots$	$= \mathrm{geo}(z^n)^2.$

Allgemein erhalten wir für die r_n Polynome in I_n die abzählende Potenzreihe

$$\underbrace{a_0}_{=1} z^0 + a_1 z^n + a_2 z^{2n} + \ldots + a_k z^{kn} + \ldots = \mathrm{geo}(z^n)^{r_n}$$

wobei a_k die Anzahl der normierten Polynome vom Grad kn ist, welche als Produkt von Polynomen aus I_n geschrieben werden können.

Sei nun F die Menge *aller* normierten Polynome in $\mathbb{F}_p[X]$. Dann erhalten wir, mit dem vorigen Resultat, die zu F gehörende abzählende Potenzreihe

$$\psi(z) = \mathrm{geo}(z^1)^{r_1} \cdot \mathrm{geo}(z^2)^{r_2} \cdot \mathrm{geo}(z^3)^{r_3} \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{1-z^n}\Big)^{r_n}.$$

Andererseits gibt es in $\mathbb{F}_p[X]$ genau p^n normierte Polynome vom Grad n. Somit muss gelten

$$\psi(z) = 1z^0 + pz^1 + p^2z^2 + \ldots + p^nz^n + \ldots = \frac{1}{1-pz}.$$

Wir erhalten also

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-z^n}\Big)^{r_n}=\frac{1}{1-pz}\quad\text{bzw. für die reziproken Reihen}\quad\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)^{r_n}=1-pz.$$

Mit logarithmischem Ableiten auf beiden Seiten erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\big((1-z^n)^{r_n}\big)}{(1-z^n)^{r_n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n(-nz^{n-1})(1-z^n)^{r_n-1}}{(1-z^n)^{r_n}}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{r_n\cdot n}{1-z^n}z^{n-1}=$$

$$\frac{D(1-pz)}{1-pz}=\frac{-p}{1-pz}=-p\cdot\mathrm{geo}(pz)=\sum_{n=1}^{\infty}-p^nz^{n-1},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n\cdot n}{1-z^n}z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}p^nz^{n-1}$$

Entwickeln wir die Summe auf der linke Seite, so erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
r_1 & + & r_1z & + & r_1z^2 & + & r_1z^3 & + & r_1z^4 & + & r_1z^5 & + & r_1z^6 & + & r_1z^7 & + & r_1z^8 & + & \dots\\
 & & 2r_2z & + & & & 2r_2z^3 & + & & & 2r_2z^5 & + & & & 2r_2z^7 & + & & + & \dots\\
 & & & & 3r_3z^2 & + & & & & & 3r_3z^5 & + & & & & & 3r_3z^8 & + & \dots\\
 & & & & & & 4r_4z^3 & + & & & & & & & 4r_4z^7 & + & & & \dots\\
 & & & & & & & & 5r_5z^4 & + & & & & & & & & & \dots\\
 & & & & & & & & & & 6r_6z^5 & + & & & & & & & \dots\\
 & & & & & & & & & & & & 7r_7z^6 & + & & & & & \dots\\
 & & & & & & & & & & & & & & \dots & & & & \dots
\end{array}$$

Addieren wir spaltenweise, so erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n\cdot n}{1-z^n}z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n}d\cdot r_d\Big)\cdot z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}p^nz^{n-1}$$

und mit Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$\sum_{d|n}d\cdot r_d=p^n$$

Setzen wir $g(d):=d\cdot r_d$ und $f(n):=p^n$, so ist $\sum_{d|n}g(d)=f(n)$ und mit Aufgabe 49 gilt:

$$g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\cdot f(n/d),\quad\text{d. h.}\quad\underbrace{n\cdot r_n}_{=g(n)}=\sum_{d|n}\mu(d)\cdot\underbrace{p^{n/d}}_{=f(n/d)}\quad\text{also}\quad r_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{d|n}\mu(d)\cdot p^{n/d}.$$

Nach Definition ist $\mu(1)=1$ und allgemein $\mu(d)\in\{-1,0,1\}$, woraus folgt

$$n\cdot r_n=p^n+\ldots+\mu(n)p\geq p^n-\sum_{k=1}^{n-1}p^k\geq 2.$$

Insbesondere ist für alle $n\geq 1$, $n\cdot r_n\geq 2$, also $r_n\geq 1$, was zu zeigen war. ⊣

Beispiele:

- $r_1 = p$: Die p normierten, irreduziblen Polynome vom Grad 1 über $\mathbb{F}_p$ sind X, $X+1$, $\ldots$, $X+(p-1)$.
- $r_2 = \frac{1}{2}(p^2-p)$: $\frac{1}{2}\sum_{d|2}\mu(d)p^{2/d} = \frac{1}{2}(p^2+\mu(2)p) = \frac{1}{2}(p^2-p)$
- $r_3 = \frac{1}{3}(p^3-p)$: $\frac{1}{3}\sum_{d|3}\mu(d)p^{3/d} = \frac{1}{3}(p^3+\mu(3)p) = \frac{1}{4}(p^3-p)$
- $r_4 = \frac{1}{4}(p^4-p^2)$: $\frac{1}{4}\sum_{d|4}\mu(d)p^{4/d} = \frac{1}{4}(p^4+\mu(2)p^2+\mu(4)p) = \frac{1}{4}(p^4-p^2)$
- $r_5 = \frac{1}{5}(p^5-p)$: $\frac{1}{5}\sum_{d|5}\mu(d)p^{5/d} = \frac{1}{5}(p^5+\mu(5)p) = \frac{1}{5}(p^5-p)$
- $r_6 = \frac{1}{6}(p^6-p^3-p^2+p)$: $\frac{1}{6}\sum_{d|6}\mu(d)p^{6/d} = \frac{1}{6}(p^6+\underbrace{\mu(2)}_{=-1}p^3+\underbrace{\mu(3)}_{=-1}p^2+\underbrace{\mu(6)}_{=1}p)$
- Für $p=3$ erhalten wir
$$r_1 = 3, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 8, \quad r_4 = 18, \quad r_5 = 48, \quad r_6 = 116,$$
und für $p=7$ erhalten wir
$$r_1 = 7, \quad r_2 = 21, \quad r_3 = 112, \quad r_4 = 588.$$
- Die 21 normierten irreduziblen Polynome vom Grad 2 über $\mathbb{F}_7$ sind:
  0. X^2+1
  1. X^2+2
  2. X^2+4
  3. X^2+X+3
  4. X^2+X+4
  5. X^2+X+6
  6. X^2+2X+2
  7. X^2+2X+3
  8. X^2+2X+5
  9. X^2+3X+1
  10. X^2+3X+5
  11. X^2+3X+6
  12. X^2+4X+1
  13. X^2+4X+5
  14. X^2+4X+6
  15. X^2+5X+2
  16. X^2+5X+3
  17. X^2+5X+5
  18. X^2+6X+3
  19. X^2+6X+4
  20. X^2+6X+6
- Das Polynom $f = X^{100}+X^6+X^5+X^2+1$ ist irreduzibel über $\mathbb{F}_2$ und somit ist $\mathbb{F}_2[X]/(f)$ ein Körper der Ordnung $2^{100} = 1\,267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376$.